

Principio di induzione: esempi ed esercizi

Principio di induzione:

Se una proprietà $\mathcal{P}(n)$ dipendente da una variabile intera n vale per $n = 1$ e se, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ allora \mathcal{P} vale su tutto \mathbb{N} .

Variante del principio di induzione:

Se una proprietà $\mathcal{P}(n)$ dipendente da una variabile intera n vale per un intero n_0 e se, per ogni intero $n \geq n_0$ vale $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ allora \mathcal{P} vale da n_0 in poi. (n_0 può essere un intero relativo).

Esercizi:

Si possono dimostrare per induzione le seguenti proprietà:

$$1. \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2. \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

$$3. \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$4. \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

$$5. \text{ Se } x > -1 \text{ allora } (1+x)^n \geq 1+nx.$$

$$6. n! \geq 2^{n-1}.$$

$$7. n^2 > 2n+1 \text{ per ogni intero } n \geq 3.$$

$$8. 2^n > n^2 \text{ per ogni intero } n \geq 5.$$

$$9. a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-1} + b^n) \quad \text{da cui segue}$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{per ogni } q \neq 1.$$

10. Ogni insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi.

$$11. \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}.$$

$$12. \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

$$13. (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dimostrazioni.

1. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. La proprietà è vera per $n = 1$: $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Supposta vera per n verifichiamo per $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

2. $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$. La proprietà è vera per $n = 1$: $\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 1 = 1^2$.

Supposta vera per n verifichiamo per $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \left(\sum_{k=1}^n (2k-1) \right) + (2n+2-1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

3. $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Vero per $n = 1$: $1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$.

Verifica che $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\ &= (n+1) \frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} = (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

4. $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$. Vero per $n = 1$. Verifica che $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k^3 \right) + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

5. $(1+x)^n \geq 1+nx$. Per $n = 1$ vale l'uguaglianza. $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

si noti che la prima disuguaglianza della riga precedente vale perché $1+x > 0$ e la seconda perché $nx^2 \geq 0$.

6. $n! \geq 2^{n-1}$: banalmente vera (con l'uguale) per $n = 1$ e per $n = 2$.

$\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$, infatti

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad \text{perché } n+1 \geq 2.$$

7. $n^2 > 2n+1$ per ogni intero $n \geq 3$. Falso per $n = 1$ e per $n = 2$, vero per $n = 3$.

$\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ per ogni $n \geq 3$, infatti

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > (2n+1) + 2n + 1 \geq 7 + 2n + 1 = 2n + 8 > 2(n+1) + 1.$$

8. $2^n > n^2$ per ogni intero $n \geq 5$. La proposizione è falsa per $n = 1, 2, 3, 4$ vera per $n = 5$.

Per ogni $n \geq 5$ si ha $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 \quad \text{per la proposizione precedente.}$$

$$9. \quad a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Ovvio per $n = 1$. Per il passaggio da n ad $n + 1$ si può procedere così:

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= a^{n+1} - a^n b + a^n b - b^{n+1} = a^n(a - b) + b(a^n - b^n) = \\ &= a^n(a - b) + b(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-1} + b^n) = \\ &= (a - b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n). \end{aligned}$$

Ponendo nella formula precedente $a = 1, b = q$ si ottiene (per $q \neq 1$)

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{che può essere verificata, nel passaggio da } n \text{ ad } n + 1, \text{ così:}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \left(\sum_{k=0}^n q^k \right) + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}.$$

$$\text{N. B. Da } S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \text{ si ottiene } q \cdot S_n = \sum_{k=1}^{n+1} q^k = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$$

da cui, sottraendo de due uguaglianze,

$$S_n - qS_n = (1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}, \text{ quindi } S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

10. Ogni insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi. Ovvio per $n = 1$.

Supponiamo che E_n abbia 2^n sottoinsiemi e sia $E_{n+1} = E_n \cup \{z\}$ (dove $z \notin E_n$).

Dividiamo i sottoinsiemi di E_{n+1} in due famiglie: quella dei sottoinsiemi di E_{n+1} che non contengono z e quella dei sottoinsiemi di E_{n+1} che lo contengono.

La prima famiglia è costituita da tutti i sottoinsiemi di E_n (che sono 2^n), ogni insieme della seconda famiglia può essere costruito come unione di $\{z\}$ con un insieme della prima: abbiamo ancora 2^n insiemi: In tutto $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

$$11 \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n + 1}. \quad \text{Per } n = 1 \text{ si ha } \frac{1}{4 - 1} = \frac{1}{2 + 1}.$$

Per il passaggio da n ad $n + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2 - 1} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} + \frac{1}{4n^2 + 8n + 3} = \frac{n}{2n + 1} + \frac{1}{(2n + 1)(2n + 3)} = \\ &= \frac{2n^2 + 3n + 1}{(2n + 1)(2n + 3)} = \frac{n + 1}{2n + 3}. \end{aligned}$$

Osservazione: questa uguaglianza può essere dimostrata direttamente tenendo conto che

$$\begin{aligned} \frac{1}{4k^2 - 1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k - 1} - \frac{1}{2k + 1} \right) \quad \text{quindi} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k - 1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k - 1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2k - 1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n + 1} \right) = \frac{n}{2n + 1}. \end{aligned}$$

N. B. Nei passaggi precedenti si è fatto un cambiamento di variabile: ponendo $k = h - 1$ si

ottiene $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k + 1} = \sum_{h=2}^{n+1} \frac{1}{2h - 1}$. Si sono poi semplificati tutti i termini che compaiono col segno opposto nella prima e nella seconda somma.

$$12 \quad \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n + 2}{2^n}. \quad \text{Per } n = 1 \text{ si ha } \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}. \quad \text{Per il passaggio da } n \text{ ad } n + 1:$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} + \frac{n + 1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n + 2}{2^n} + \frac{n + 1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n + 4 - n - 1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n + 1) + 2}{2^{n+1}}.$$

Osservazione: per questa uguaglianza, come per la maggior parte delle precedenti, è essenziale verificarne la validità per almeno un valore di n : l'implicazione $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ vale anche in $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 7 - \frac{n+2}{2^n}$ ma questa uguaglianza è sempre falsa (a 7 si può sostituire qualunque numero diverso da 2 e l'uguaglianza resta falsa).

$$13. \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

È bene ricordare che per ogni $n > 0$ e per ogni $k: 0 < k < n$ vale l'uguaglianza

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{infatti} \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-k+1)!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} = (n-1)! \cdot \frac{n-k+k}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}. \end{aligned}$$

L'uguaglianza

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

è vera per $n=1$. Supposta vera per $n-1$ cioè

$$(a+b)^{n-1} = a^{n-1} + \binom{n-1}{1} a^{n-2} b^1 + \binom{n-1}{2} a^{n-3} b^2 + \dots + \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k + \dots + b^{n-1}$$

scriviamo (incolonnando i fattori simili)

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= (a+b)^{n-1} (a+b) = \\ &= \{a^{n-1} + \binom{n-1}{1} a^{n-2} b^1 + \binom{n-1}{2} a^{n-3} b^2 + \dots + \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k + \dots + b^{n-1}\} \cdot (a+b) = \\ &= \begin{array}{cccccccc} a^n + & \binom{n-1}{1} a^{n-1} b^1 & + & \binom{n-1}{2} a^{n-2} b^2 & + & \dots + & \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k & + & \dots + & a b^{n-1} & + \\ a^{n-1} b^1 & + & \binom{n-1}{1} a^{n-2} b^2 & + & \dots + & \binom{n-1}{k-1} a^{n-k} b^k & + & \dots + & \binom{n-1}{n-2} a b^{n-1} & + & b^n \end{array} \end{aligned}$$

ed otteniamo il risultato: il coefficiente di $a^{n-k} b^k$ è: $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

Esercizi.

i) Calcolare il coefficiente di $x^9 y^{12}$ nello sviluppo di $\left(\frac{2}{3}x^2 y - \frac{3}{4} \frac{y^2}{x}\right)^9$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}x^2 y - \frac{3}{4} \frac{y^2}{x}\right)^9 &= \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \left(\frac{2}{3}x^2 y\right)^k \left(-\frac{3}{4} \frac{y^2}{x}\right)^{9-k} = \\ &= \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k x^{2k} y^k \left(-\frac{3}{4}\right)^{9-k} y^{18-2k} x^{k-9} = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(-\frac{3}{4}\right)^{9-k} x^{3k-9} y^{18-k}. \end{aligned}$$

Deve essere $k = 6$ quindi il coefficiente cercato è

$$\binom{9}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2^6 \cdot 3^3}{3 \cdot 2 \cdot 3^6 \cdot 4^3} = -\frac{28}{9}.$$

ii) Risolvere l'equazione $8 \cdot \binom{n}{17} = 9 \cdot \binom{n}{15}$ (n intero maggiore di 16)

Ricordando che

$$\binom{n}{17} = \frac{n!}{17! \cdot (n-17)!}, \quad \binom{n}{15} = \frac{n!}{15! \cdot (n-15)!}$$

l'equazione è:

$$8 \cdot \frac{n!}{17! \cdot (n-17)!} = 9 \cdot \frac{n!}{15! \cdot (n-15)!} \quad \text{semplificando per } n!$$

$$\frac{8}{17! \cdot (n-17)!} = \frac{9}{15! \cdot (n-15)!} \quad \text{e riscrivendo meglio}$$

$$\frac{8}{17 \cdot 16 \cdot 15! \cdot (n-17)!} = \frac{9}{15! \cdot (n-15) \cdot (n-16) \cdot (n-17)!}$$

semplificando ancora per tutto il semplificabile

$$\frac{8}{17 \cdot 16} = \frac{9}{(n-15) \cdot (n-16)} \quad \text{dunque} \quad (n-15) \cdot (n-16) = 18 \cdot 17.$$

Le soluzioni sono $n = -2$ e $n = 33$ quindi l'unica soluzione è $n = 33$.

iii) Risolvere l'equazione $\binom{n}{5} = \binom{n}{8}$ (n intero maggiore di 8)

$$\text{Da } \frac{n!}{5! \cdot (n-5)!} = \frac{n!}{8! \cdot (n-8)!} \quad \text{si ottiene l'equazione (di terzo grado)}$$

$$(n-5) \cdot (n-6) \cdot (n-7) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \quad \text{cioè}$$

$$n^3 - 18n^2 + 107n - 13 \cdot 42 = 0.$$

Certamente $n = 13$ è soluzione, per la simmetria del coefficiente binomiale. Dividendo per $(n-13)$ ci si accorge che non esistono altre soluzioni reali:

$$n^3 - 18n^2 + 107n - 546 = (n-13)(n^2 - 5n + 42)$$

iv) Risolvere l'equazione $\binom{n}{5} = \binom{n}{9}$ (n intero maggiore di 9)

Procedendo come sopra si ottiene l'equazione di quarto grado

$$(n-5)(n-6)(n-7)(n-8) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \quad \text{cioè}$$

$$n^4 - 26n^3 + 251n^2 - 1066n - 1344.$$

Di questa equazione conosciamo la soluzione $n = 14$ e si può verificare che anche $n = -1$ è soluzione dell'equazione (per noi da scartare, almeno per il momento). Non esistono altre soluzioni reali:

$$n^4 - 26n^3 + 251n^2 - 1066n - 1344 = (n-14)(n+1)(n^2 - 13n + 96).$$

v) Calcolare $\sum_{k=6}^n (4k-1)$.

Ricordando che $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_{k=6}^n (4k-1) &= 4 \sum_{k=6}^n k - \sum_{k=6}^n 1 = 4 \left(\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^5 k \right) - (n-5) = \\ &4 \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{5(5+1)}{2} \right) - (n-5) = 2n(n+1) - 60 - n + 5 = 2n^2 + n - 55. \end{aligned}$$

Altre proprietà che si possono verificare per induzione.

- $\prod_{k=1}^n (1+x^{2^k}) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$.
- Per ogni a intero dispari 2^{n+2} divide $a^{2^n} - 1$ (per induzione su n).
- $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ è divisibile per 11.
- Ogni insieme finito ammette sempre sia massimo che minimo.

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Dimostrare con il principio di Induzione che:

1) $2 + 2^2 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) $2^{n-1} \leq n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4) $\sum_{k=1}^n \frac{4k^2 + 2k - 1}{(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{(2n+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

5) $\sum_{k=1}^n \frac{4k^2 + 6k + 1}{(2k+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(2n+2)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

6) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{q^k} = \frac{n(1-q) - (1-q^n)q}{(1-q)^2 q^n} \quad q \in \mathbb{R}$

7) $5^n \geq 3^n + 4^n, \text{ con } n \geq 2$

8) $3^n \geq 2^n n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

9) $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{con } q \neq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

10) $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

11) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

12) $(1+x)^n \geq 1+nx, \text{ con } x \geq -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

13) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

14) $n^3 - 5n^2 + 6n + 1 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$15) \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$$

Risoluzione esercizi

$$1) 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

$$p(1): 2 = 2^2 - 2 \quad \text{vera}$$

$$p(n) \Rightarrow p(n+1):$$

$$2 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 2 = 2^{n+2} - 2 \quad \text{vera}$$

$$2) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\text{Dopo che } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{es. 11})$$

$$p(1): 1^3 = 1 \quad \text{vera}$$

$$p(n) \Rightarrow p(n+1): \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$$

$$= \frac{(n+1)^2 \cdot [n^2 + 4n + 4]}{4} = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4} \quad \text{vera}$$

$$3) 2^{n-1} \leq n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$p(1): \quad \text{vera}$$

$$p(n) \Rightarrow p(n+1): \quad 2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \leq 2n! \leq (n+1)! \quad \text{vera}$$

$$4) \sum_{k=1}^n \frac{4k^2 + 2k - 1}{(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$p(1): \frac{4+2-1}{3!} = 1 - \frac{1}{3!} \quad \text{vera}$$

$$p(n) \Rightarrow p(n+1):$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{4k^2 + 2k - 1}{(2k+1)!} &= 1 - \frac{1}{(2n+1)!} + \frac{4(n+1)^2 + 2(n+1) - 1}{(2n+3)!} = \\ &= 1 - \frac{(2n+3) \cdot (2n+2) - 4(n+1)^2 - 2(n+1) + 1}{(2n+3)!} = \\ &= 1 - \frac{\cancel{4n^2} + \cancel{4n} + \cancel{6n} + \cancel{6} - \cancel{4n^2} - \cancel{8n} - \cancel{4} - \cancel{2n} - \cancel{2} + 1}{(2n+3)!} = 1 - \frac{1}{(2n+3)!} \end{aligned}$$

$$5) \sum_{k=1}^n \frac{4k^2 + 6k + 1}{(2k+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(2n+2)!}$$

$$p(1): \frac{4+6+1}{4!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4!} \quad \text{vera}$$

$$p(n) \Rightarrow p(n+1):$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{4k^2 + 6k + 1}{(2k+2)!} + \frac{4(n+1)^2 + 6(n+1) + 1}{(2n+4)!} &= \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{(2n+2)!} + \frac{4(n+1)^2 + 6(n+1) + 1}{(2n+4)!} = \frac{1}{2} - \left[\frac{(2n+4) \cdot (2n+3) - 4(n+1)^2 - 6(n+1) - 1}{(2n+4)!} \right] = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\cancel{4n^2} + \cancel{6n} + \cancel{8n} + 12 - \cancel{4n^2} - \cancel{8n} - 4 - \cancel{6n} - 6 - 1}{(2n+4)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(2n+4)!} \end{aligned}$$

$$6) \sum_{k=1}^n \frac{k}{q^k} = \frac{n \cdot (1-q) - (1-q^n) \cdot q}{(1-q)^2 \cdot q^n}$$

$$p(1): \quad \frac{1}{q} = \frac{1-q - (1-q)q}{(1-q)^2} \cdot \frac{1}{q} \quad \text{vera}$$

$$p(n) \Rightarrow p(n+1):$$

$$\begin{aligned} \frac{n(1-q) - (1-q^n)q}{(1-q)^2 \cdot q^n} + \frac{n+1}{q^{n+1}} &= \frac{nq(1-q) - (1-q^n)q^2 + (1-q)^2 \cdot (n+1)}{(1-q)^2 \cdot q^{n+1}} = \\ &= \frac{nq - \cancel{nq^2} - \cancel{q^2} + q^{n+2} + n+1 - 2qn - 2q + \cancel{q^2n} + \cancel{q^2}}{(1-q)^2 \cdot q^{n+1}} \end{aligned}$$

Ma allora:

$$\begin{aligned} \frac{n - nq + q^{n+2} + 1 - 2q}{(1-q)^2 \cdot q^{n+1}} &\stackrel{?}{=} \frac{(n+1) \cdot (1-q) - (1-q^{n+1})q}{(1-q)^2 \cdot q^{n+1}} \\ &\downarrow \\ \frac{1 - q + n - nq - q + q^{n+2}}{(1-q)^2 \cdot q^{n+1}} &\quad \text{vera} \end{aligned}$$

$$\mathbf{7)} \quad 5^n \geq 3^n + 4^n \quad n \geq 2$$

$$p(2): \quad 25 \geq 25 \quad \text{vera}$$

$$p(n) \Rightarrow p(n+1):$$

$$5^{n+1} = 5 \cdot 5^n \geq 5 \cdot (3^n + 4^n) = 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 4^n \geq 3 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n = 3^{n+1} + 4^{n+1} \quad \text{vera}$$

$$\mathbf{8)} \quad 3^n \geq 2^n \cdot n$$

$$p(1): \quad 3 \geq 2 \quad \text{vera}$$

$p(n) \Rightarrow p(n+1)$:

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \geq 3 \cdot 2^n \cdot n = (2+1) \cdot 2^n \cdot n = 2^{n+1} \cdot n + 2^n \cdot n \geq n \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}(n+1)$$

dove $3 \cdot 2^n \cdot n \geq 2^{n+1} \cdot (n+1)$

$$3 \cdot 2^n \cdot n \geq 2 \cdot 2^n \cdot n + 2^{n+1}$$

$$2^n \cdot n \geq 2^{n+1} \quad \text{per } n \geq 2$$

9) $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad q \neq 1$

$p(1)$: $1 + q = \frac{q^2 - 1}{q - 1} = q + 1 \quad \text{vera}$

$p(n) \Rightarrow p(n+1)$:

$p(n+1)$: $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{\cancel{q^{n+1}} - 1 + q^{n+2} - \cancel{q^{n+1}}}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1} \quad \text{vera}$

10) $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$

$p(1)$: $1 = 1 \quad \text{vera}$

$p(n) \Rightarrow p(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \quad \text{vera}$

11) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

$p(1)$: $1 = 1 \quad \text{vera}$

$$p(n) \Rightarrow p(n+1): \quad \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \quad \text{vera}$$

$$\mathbf{12)} \quad (1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x \geq -1$$

$$p(1): \quad 1+x \geq 1+x \quad \text{vera}$$

$$p(n) \Rightarrow p(n+1):$$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx) \cdot (1+x) = 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)x \quad \text{vera}$$

$$\mathbf{13)} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$p(1): \quad 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \quad \text{vera}$$

$$p(n) \Rightarrow p(n+1):$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1) \cdot (2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1) \cdot (2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1) \cdot (2n^2 + 7n + 6)}{6} = \\ &= \frac{(n+1) \cdot (2n+3) \cdot (n+2)}{6} \quad \text{vera} \end{aligned}$$

$$\mathbf{14)} \quad n^3 - 5n^2 + 6n + 1 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$p(1): \quad 3 \geq 0 \quad \text{vera}$$

$$p(n) \Rightarrow p(n+1):$$

$$(n+1)^3 - 5(n+1)^2 + 6(n+1) + 1 \geq 0$$

↕

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 5n^2 - 10n - 5 + 6n + 6 + 1 \geq 0$$

\Downarrow

$$\cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1 - \cancel{5n^2} - 10n - 5 + \cancel{6n} + 6 + \cancel{1} \geq 0$$

per cui rimane

$$3n^2 - 7n + 2 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ per ogni } n \text{ in } \mathbb{N}$$

$$n = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6} \quad \Rightarrow \quad n < \frac{1}{3} \quad n > 2$$

$$\frac{\cancel{2}^1}{\cancel{6}_3} = \frac{1}{3}$$