Algoritmi e Strutture Dati

Elementi di Programmazione Dinamica

Maria Rita Di Berardini, Emanuela Merelli[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Camerino

Parte I

Elementi di programmazione dinamica

Elementi di programmazione dinamica

Abbiamo visto come è possibile applicare la tecnica di PD per risolvere il problema della moltiplicazione di una sequenza di matrici (algoritmo **MatrixChainOrder**)

Ma, da un punto di vista ingegneristico, quando dovremmo cercare di risolvere un problema con la PD?

Cerchiamo di rispondere a questa domanda esaminando i due ingredienti chiave che deve avere un problema di ottimizzazione affinchè possa essere applicata la PD: la **sottostruttura ottima** e i **sottoproblemi ripetitivi**

Elementi di programmazione dinamica: sottostruttura ottima

- un problema ha una **sottostruttura ottima** se una soluzione ottima del problema contiene al suo interno soluzioni ottime di sottoproblemi
- se un problema presenta una sottostruttura ottima, allora è possibile costruire una soluzione ottima del problema combinando soluzioni ottime di sottoproblemi
- ciò potrebbe essere un buon indizio dell'applicabilità della PD

Elementi di programmazione dinamica: sottoproblemi ripetuti

- lo spazio dei sottoproblemi da risolvere deve essere "**piccolo**"
- Questo, più l'uso di una tabella per memorizzare soluzioni parziali, consente di ridurre il tempo di esecuzione
- **Obiettivo**: scrivere un algoritmo che possa essere eseguito in un **tempo polinomiale**

Sottostruttura Ottima

Per capire se un problema ha una sottostruttura ottima si segue il seguente schema:

1. si suppone di conoscere la scelta che porta ad una soluzione ottima. **NB**: in questa fase non interessa sapere come tale scelta sia stata determinata; ci limitiamo a supporre di conoscerla

   assumiamo che la parentesizzazione ottima di $A_i \cdots A_j$ suddivida il prodotto fra A_k e A_{k+1}

2. determiniamo quali sottoproblemi considerare e come caratterizzare lo spazio risultante dei sottoproblemi.

   se k (con $i \leq k < j$) caratterizza la soluzione ottima, risolviamo i due sottoproblemi $A_i \cdots A_k$ e $A_{k+1} \cdots A_j$

3. dimostrare, utilizzando la tecnica "taglia e incolla", che le soluzioni dei sottoproblemi utilizzati all'interno della soluzione ottima sono a loro volta ottime

Sottostruttura Ottima

La sottostruttura ottima varia a seconda del problema in due modi

1. per il numero di sottoproblemi utilizzati all'interno di una soluzione ottima del problema originale

   la suddivisione ottima del prodotto $A_{i\ldots j}$ contiene due sottoproblemi

2. per il numero di possibili scelte per determinare quale sottoproblema (o quali sottoproblemi) utilizzare in una soluzione ottima.

   l'indice k che determina la suddivisione ottima, varia nell'intervallo $i \leq k < j$ e può essere scelto fra $j - i$ canditati

Calcolo del valore della soluzione ottima

Una volta verificata la sottostruttura ottima del problema:

1. si identifica il numero di sottoproblemi da risolvere

   risolvere il problema del prodotto di una sequenza di matrici, significa risolvere un numero di sottoproblemi dell'ordine di $\Theta(n^2)$. Perchè?

   Possibili sottoproblemi: tutti quelli della forma $A_{i\dots j}$ con $i = 1, \dots n$ e $j = i, \dots n$. Fissato i dobbiamo risolvere $n - i + 1$ sottoproblemi. In totale

$$\sum_{i=1}^{n} n - i + 1 = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

2. se tale numero è "ragionevole", forniamo una soluzione ricorsiva che calcola il valore della soluzione ottima

   definiamo ricorsivamente il costo del prodotto $A_{i\dots j}$ tramite la funzione $m[i, j]$

Calcolo del valore della soluzione ottima

3. la soluzione ricorsiva viene successivamente implementata mediante uno schema bottom-up (dal basso verso) l'alto: si costruisce la soluzione del problema originario a partire dalle soluzioni dei sottoproblemi

   Il costo della soluzione del problema è pari al costo della soluzione dei sottoproblemi più il costo imputabile alla scelta effettuata

   se $i < j$:

$$m[i,j] = \min_{i \leq k < j} \left\{ m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1} p_k p_j \right\}$$

   Tipicamente, in questa fase vengono raccolte tutte le informazioni utili per costruire la soluzione ottima

   Matrix-Chain-Order memorizza tali informazioni in $m[i,j]$

Tempo di esecuzione

Informalmente, il tempo di esecuzione di un algoritmo di programmazione dinamica dipende dal prodotto di due fattori:

1. il numero dei sottoproblemi
2. il numero di scelte da considerare per ogni sottoproblema

Nel caso della moltiplicazione di una sequenza di n matrici;

1. il numero complessivo dei sottoproblemi è $\Theta(n^2)$
2. e per ognuno di essi avevamo al massimo $n-1$ scelte

La complessità dell'algoritmo è $\Theta(n^3)$

Ruolo della sottostruttura ottima

Sia $G = (V, A)$ un grafo orientato ed $u, v \in V$ due nodi in G

Cammino minimo in un grafo non pesato: trovare un cammino semplice (senza cicli) da u a v con minimo numero di archi

Cammino massimo in un grafo non pesato: trovare un cammino semplice (senza cicli) da u a v con massimo numero di archi

Questi due problemi sembrano molto simili, ma **solo** il primo presenta una sottostruttura ottima

Cammino minimo e sottostruttura ottima

Sia p un cammino $u \overset{p}{\rightsquigarrow} v$ dal vertice u al vertice v con minimo numero di archi

Se $u \neq v$ (cioè se il problema non è banale), allora deve esistere un nodo intermedio w (w può anche essere u o v) tale che il cammino $u \overset{p}{\rightsquigarrow} v$ può essere decomposto nei cammini $u \overset{p_1}{\rightsquigarrow} w$ e $w \overset{p_2}{\rightsquigarrow} v$

Chiaramente il $\#_{\text{archi}}(p) = \#_{\text{archi}}(p_1) + \#_{\text{archi}}(p_2)$

Sottostruttura ottima: se p è un cammino minimo da u a v, allora p_1 e p_2 sono cammini minimi da u a w e da w a v rispettivamente

Di nuovo, dimostriamo la sottostruttura ottima usando la tecnica taglia e incolla

Cammino minimo e sottostruttura ottima

Assumiamo, per assurdo, che il cammino p_1 non sia minimo

Deve esistere un cammino alternativo $u \overset{p_1'}{\rightsquigarrow} w$ t.c. $\#_{\text{archi}}(p_1') < \#_{\text{archi}}(p_1)$

Sostituendo in p p_1 con p_1' otteniamo un cammino da u a v con un numero di archi pari a

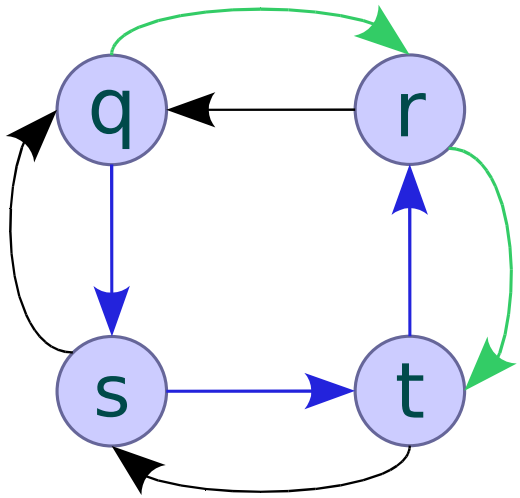
$$\#_{\text{archi}}(p_1') + \#_{\text{archi}}(p_2) < \#_{\text{archi}}(p_1 + \#_{\text{archi}}(p_2) = \#_{\text{archi}}(p)$$

con p cammino minimo – contraddizione

In maniera analoga possiamo dimostrare che anche il cammino p_2 ha un numero di archi minimo

Saremmo tentati di supporre che anche il problema del cammino semplice massimo presenti una sottostruttura ottima

Cammino massimo e sottostruttura ottima

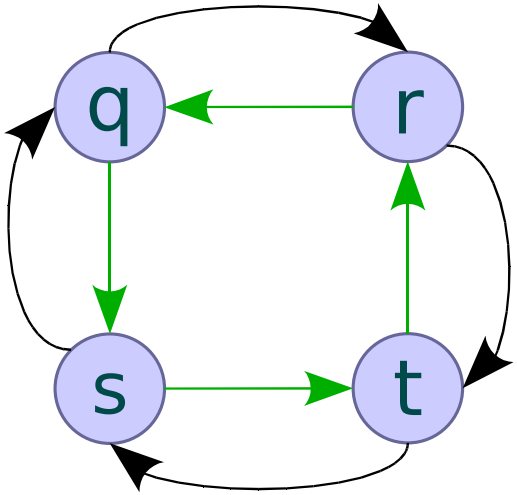


Un cammino semplice massimo tra q ed t è $q \longrightarrow r \longrightarrow t$, ma:

- $q \longrightarrow r$ non è un cammino semplice massimo tra q e r (esiste un cammino semplice tra i due nodi con numero maggiore di archi, $q \longrightarrow s \longrightarrow t \longrightarrow r$)
- in maniera analoga $r \longrightarrow t$ non è un cammino semplice massimo tra r e t ($r \longrightarrow q \longrightarrow s \longrightarrow t$)

Cammino massimo e sottostruttura ottima

Inoltre ...

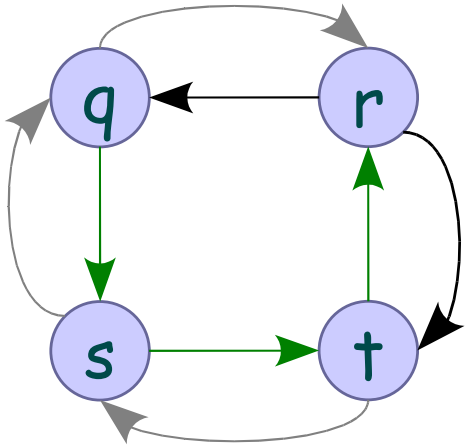


assemblando soluzioni ottime di sottoproblemi, ad es. $q \longrightarrow s \longrightarrow t \longrightarrow r$ e $r \longrightarrow q \longrightarrow s \longrightarrow t$, non otteniamo una soluzione valida del problema

La combinazione delle due soluzioni da luogo ad un ciclo ed il cammino non è un cammino semplice

Cammino massimo e sottostruttura ottima

I sottoproblemi non sono **indipendenti**: la soluzione di un sottoproblema può influire sulla soluzione di un altro sottoproblema



L'aver usato i vertici s e t per costruire il cammino massimo tra q ed r, ci impedisce di usare questi vertici per costruire il cammino massimo tra r e t (la combinazione delle due soluzioni produrrebbe un cammino non semplice) e quindi di risolvere il problema

Cammino massimo e sottostruttura ottima

Non è stato ancora trovato un algoritmo di programmazione dinamica in grado di risolvere il problema del cammino massimo in un grafo non pesato

In effetti, questo problema è NP-completo ossia è improbabile che possa essere risolto in un tempo polinomiale

Sottoproblemi ripetuti ed efficienza

Recursive-Matrix-Chain-Order(p, i, j)

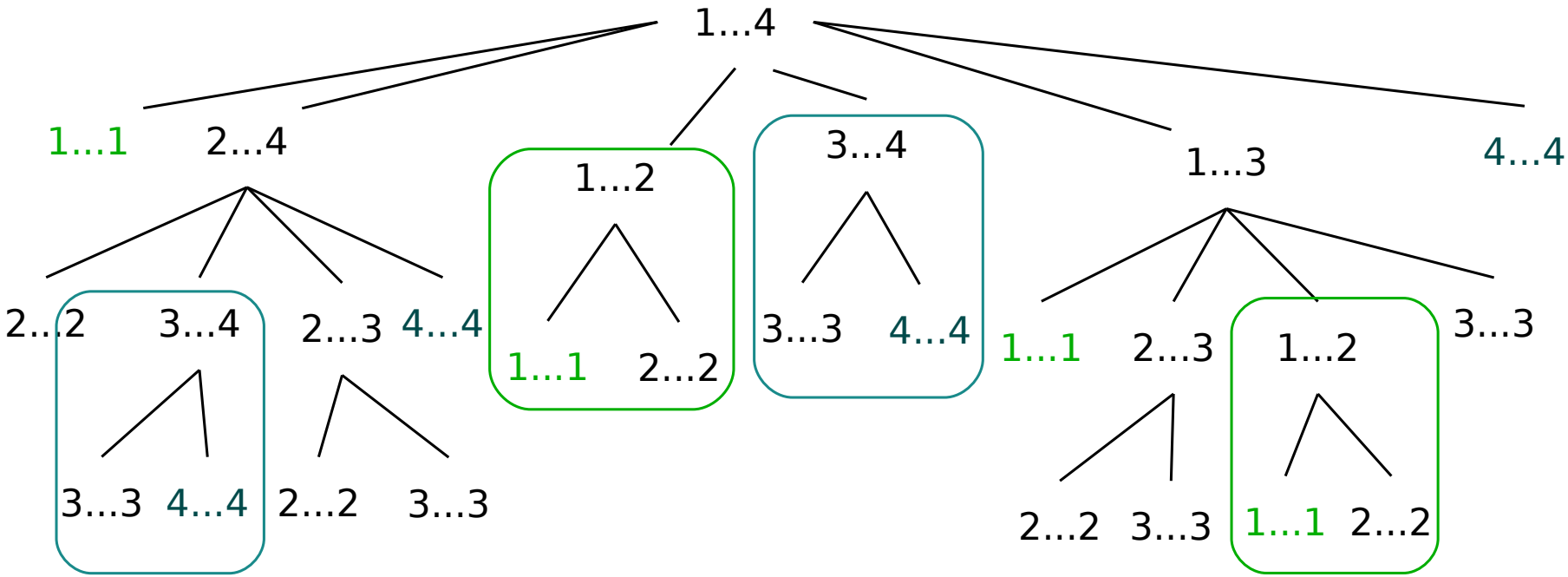
1. **for** $i = j$
2. **then return** 0
3. $m[i, j] \leftarrow \infty$

4. **for** $k \leftarrow i$ **to** $j - 1$
5. **do** $q \leftarrow$ **Recursive-Matrix-Chain-Order**(p, i, k)
   $+$ **Recursive-Matrix-Chain-Order**$(p, k + 1, j)$
   $+$ $p_{i-1} p_k p_j$

6. **if** $q < m[i, j]$
7. **then** $m[i, j] \leftarrow q$

8. **return** $m[i, j]$

Sottoproblemi ripetuti ed efficienza



Sottoproblemi ripetuti ed efficienza

Poichè eseguire le righe 1-2 e 6-7 richiede almeno un'unità di tempo, abbiamo

$$T(1) \geq 1$$
$$T(n) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (T(k) + T(n-k) + 1) \quad \text{per } n \geq 1$$

Inoltre:

$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} (T(k) + T(n-k) + 1)$$
$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} T(k) + \overbrace{\sum_{k=1}^{n-1} T(n-k)}^{\sum_{j=1}^{n-1} T(j)} + \overbrace{\sum_{k=1}^{n-1} 1}^{n-1} =$$
$$1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} T(k) + (n-1) = 2\sum_{k=1}^{n-1} T(k) + n$$

Sottoproblemi ripetuti ed efficienza

Possiamo riscrivere la ricorrenza come $T(n) \geq 2 \sum_{k=1}^{n-1} T(k) + n$. Dimostriamo per induzione che $T(n) \geq 2^{n-1}$ per ogni $n \geq 1$ e, quindi, che $T(n) = \Omega(2^n)$

Caso base: $T(1) \geq 1 = 2^0$

Passo induttivo: Assumiamo $n \geq 2$

$$
\begin{array}{rcll}
T(n) & \geq & 2 \sum_{k=1}^{n-1} T(k) + n & \text{per ip. induttiva} \\
& \geq & 2 \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} + n & \text{ponendo } i = k-1 \\
& = & 2 \sum_{i=0}^{n-2} 2^i + n = 2\frac{(2^{n-1}-1)}{2-1} + n & \\
& = & 2^n - 2 + n & \text{poichè } n \geq 2 \\
& \geq & 2^n & \\
& \geq & 2^{n-1} &
\end{array}
$$

Parte II

La più lunga sottosequenza comune

Definizione del problema

Nelle applicazioni biologiche spesso si confronta il DNA di due, o più, organismi differenti

La struttura del DNA è formata da una stringa di molecole dette **basi**: adenina, citosina, guanina, e timina

La struttura del DNA è rappresentata da una stringa sull'insieme finito $\{A, C, G, T\}$

Il DNA di due organismi

$$S_1 = ACCGGTCGCGCGGAAGCCGGCCGAA$$

$$S_2 = GTCGTTCGGAATGCCGTTGCTCTGTAAA$$

Definizione del problema

Uno degli scopi del confronto tra due molecole di DNA è quello di determinare il grado di somiglianza delle due molecole

Potremmo dire che due molecole si somigliano se, date le stringhe S_1 e S_2 che rappresentato le molecole:

- una è sottostringa di un'altra
- il numero delle modifiche richieste per trasformare l'una nell'altra è piccolo
- trovare una terza stringa S_3 le cui basi si trovano in ciascuna delle stringhe S_1 ed S_2: le basi devono presentarsi nello stesso ordine, senza essere necessariamente consecutive

Definizione del problema

Ad esempio, date le stringhe:

$$S_1 = ACCGGTCGAGTGCGCGGAAGCCGGCCGAA$$

$$S_2 = GTCGTTCGGAATGCCGTTGCTCTGTAAA$$

la stringa S_3 è:

$$S_3 = GTCGTCGGAAGCCGGCCGAA$$

Formalizziamo questo concetto

Definizione del problema

Siano $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$ e $Z = \langle z_1, z_2, \cdots, z_k \rangle$ due sequenze; diciamo che Z è una **sottosequenza** di X se esiste una sequenza crescente $i_1, i_2, \cdots, i_k$ di indici di X tali che $x_{i_j} = z_j$ per ogni $j = 1, 2, \cdots, k$

Ad esempio, se $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ e $Z = \langle B, C, D, B \rangle$ la sequenza di indici è: $\langle 2, 3, 5, 7 \rangle$

$x_{i_1} = x_2 = B$, $x_{i_2} = x_3 = C$, $x_{i_3} = x_5 = D$ e $x_{i_4} = x_7 = B$

Definizione del problema

Date due sequenza X e Y diciamo che Z è una **sottosequenza comune** di X e Y se è una sottosequenza sia di X che di Y

Ad esempio, se $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ e $y = \langle B, D, C, A, B, A \rangle$ la sequenza $\langle B, C, A \rangle$ è una sottosequenza di X eY, ma non è la più lunga sottosequenza comune (Longest Common Subsequence, LCS)

Sottosequenze comuni più lunghe: $\langle B, C, B, A \rangle$ e $\langle B, D, A, B \rangle$

Problema: Siano $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$ ed $Y = \langle y_1, y_2, \cdots, y_n \rangle$ due sequenze; trovare una sottosequenza di lunghezza massima che è comune sia a X che a Y

Fase 1: struttura della soluzione ottima

In questo caso, applicare la "forza bruta" significa considerare tutte le possibili sottosequenze di X e confrontarle con tutte le sottosequenze di Y

Quante sono le possibili sottosequenze di $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$?

Ogni sottosequenza di X corrisponde ad un sottoinsieme degli indici $\{1, 2, \cdots, m\}$ e tutti i possibili sottoinsiemi di $\{1, 2, \cdots, m\}$ sono 2^m

Il **solo** enumerare tutte le possibili sottosequenze di X richiede un tempo esponenziale

Di nuovo, la tecnica della forza bruta non è adeguata

Fase 1: struttura della soluzione ottima

Nel seguito definiremo classi di sottoproblemi corrispondenti a coppie di prefissi delle sequenze in input

Sia $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$ e $i = 1, ..., m$; **l'i-esimo prefisso** di X è definito come $X_i = \langle x_1, x_2, \cdots, x_i \rangle$ (con $X_m = X$ e $X_0 = \langle\rangle$, i.e. la sequenza vuota)

Siano $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, y_2, \cdots, y_n \rangle$ le due sequenze input e $Z = \langle z_1, z_2, \cdots, z_k \rangle$ una LCS di X e Y. Quale è la struttura di Z??

Caso banale: almeno una delle due sequenze è vuota (ossia, $X = \langle\rangle$ or $Y = \langle\rangle$). In questo caso, X e Y possono avere una solo sottosequenza comune, la sottosequenza vuota e quindi $Z = \langle\rangle$

Fase 1: struttura della soluzione ottima

Caso non banale: X che Y sono entrambe non vuote; in questo caso usiamo il seguente teorema

Teorema 1 (*sottostruttura ottima di LCS*): siano $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$, $Y = \langle y_1, y_2, \cdots, y_n \rangle$ e $Z = \langle z_1, z_2, \cdots, z_k \rangle$ una qualsiasi LCS di X e Y. Allora:

1. se $x_m = y_n$, allora $z_k = x_m = y_n$ e Z_{k-1} è una LCS di X_{m-1} e Y_{n-1}
2. se $x_m \neq y_n$ e $z_k \neq x_m$ allora Z è una LCS di X_{m-1} e Y
3. se $x_m \neq y_n$ e $z_k \neq y_n$ allora Z è una LCS di X e Y_{n-1}

L'idea è la seguente

Per trovare una LCS di $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, y_2, \cdots, y_n \rangle$ distinguiamo due casi:

1. $x_m = y_n$: troviamo una LCS di X_{m-1} e Y_{n-1} e accodiamo x_m come ultimo simbolo
2. $x_m \neq y_n$:
   - troviamo una LCS di X_{m-1} e Y
   - troviamo una LCS di X e Y_{n-1}

   La più lunga di queste sequenze è una LCS di X e Y

la proprietà della sottostruttura ottima è verificata perchè una soluzione ottima contiene al suo interno soluzioni ottime di sottoproblemi

L'idea è la seguente

La sottostruttuta ottima di consente di risolvere il problema originario, identificare una LCS di $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, y_2, \cdots, y_n \rangle$, cercando LCS di coppie di prefissi di X e Y

Quanti sottoproblemi dobbiamo risolvere? Tutti quelli della forma:

$$trovare\ una\ LCS\ di\ X_i\ e\ Y_j\ con\ i = 1 \cdots m\ e\ j = 1 \cdots n$$

In totale sono nm sottoproblemi distinti

Fase 2: una soluzione ricorsiva

Definiamo $c[i,j]$ come la lunghezza di una qualsiasi LCS tra X_i e Y_j:

- se $i = 0$ o $j = 0$ (almeno una delle due è vuota) $c[i,j] = 0$
- se $i,j > 0$ e $x_i = y_j$, $c[i,j] = c[i-1,j-1] + 1$
- se $i,j > 0$ e $x_i \neq y_j$, $c[i,j] = \max(c[i-1,j], c[i,j-1])$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \text{ oppure } j = 0 \\ c[i,j] = c[i-1,j-1] + 1 & \text{se } i,j > 0 \text{ e } x_i = y_j \\ \max(c[i-1,j], c[i,j-1]) & \text{se } i,j > 0 \text{ e } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

Esempio: calcolare la lunghezza di una LCS di $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ e $Y = \langle B, D, C, A, B, A \rangle$

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0						
B	2	0						
C	3	0						
B	4	0						
D	5	0						
A	6	0						
B	7	0						

Casi Base: $c[i, 0] = c[0, j] = 0$ per ogni $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

Se $i, j > 0$ di quali posizioni abbiamo bisogno per calcolare $c[i, j]$

- se $x_i = y_j$, abbiamo bisogno di $c[i-1, j-1]$ (posizione in alto e a sinistra)
- se $x_i \neq y_j$. abbiamo bisogno di $c[i-1, j]$ (in alto) e $c[i, j-1]$ (a sinistra)

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0						
B	2	0						
C	3	0		$\nwarrow$	$\uparrow$			
B	4	0		$\leftarrow$	i, j			
D	5	0						
A	6	0						
B	7	0						

Ci basta riempire la matrice riga per riga

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1	2	2
C	3	0	1	1	2	2	2	2
B	4	0	1	1	2	2	3	3
D	5	0	1	2	2	2	3	3
A	6	0	1	2	2	3	3	4
B	7	0	1	2	2	3	4	4

La lunghezza di una LCS tra X e Y è data da $c[n, m]$

L'algoritmo per il calcolo della lunghezza di una LCS

LcsLength(X, Y)

1. $m \leftarrow length[X]$
2. $n \leftarrow length[Y]$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** m **do** $c[i, 0] \leftarrow 0$
4. **for** $j \leftarrow 1$ **to** n **do** $c[0, j] \leftarrow 0$
5. **for** $i \leftarrow 1$ **to** m
6. **do for** $j \leftarrow 1$ **to** n
7. **do if** $x_i = y_j$
8. **then** $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j-1] + 1$
9. **else if** $c[i-1, j] \geq c[i, j-1]$
10. **then** $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j]$
11. **else** $c[i, j] \leftarrow c[i, j-1]$
12. **return** c

Il calcolo di ogni posizione della tabella richiede un tempo costante; allora il costo di esecuzione della procedura è $O(nm)$

Fase 4: costruzione di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1	2	2
C	3	0	1	1	2	2	2	2
B	4	0	1	1	2	2	3	3
D	5	0	1	2	2	2	3	3
A	6	0	1	2	2	3	3	4
B	7	0	1	2	2	3	4	4

Possiamo riesaminare le scelte fatte per calcolare la lunghezza di una LCS al contrario, ossia dall'ultima alla prima, per costruire una soluzione ottima

Fase 4: costruzione di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	**1**	← 1	1	1	2	2
C	3	0	1	1	**2**	← 2	2	2
B	4	0	1	1	2	2	**3**	3
D	5	0	1	2	2	2	↑ 3	3
A	6	0	1	2	2	3	3	**4**
B	7	0	1	2	2	3	4	↑ 4

L'algoritmo per il calcolo della lunghezza di una LCS

LcsLength(X, Y)

1. $m \leftarrow length[X]$
2. $n \leftarrow length[Y]$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** m **do** $c[i, 0] \leftarrow 0$
4. **for** $j \leftarrow 1$ **to** n **do** $c[0, j] \leftarrow 0$
5. **for** $i \leftarrow 1$ **to** m
6. **do for** $j \leftarrow 1$ **to** n
7. **do if** $x_i = y_j$
8. **then** $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j-1] + 1$
9. $b[i, j] \leftarrow$ "$\nwarrow$"
10. **else if** $c[i-1, j] \geq c[i, j-1]$
11. **then** $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j]$
12. $b[i, j] \leftarrow$ "$\uparrow$"
13. **else** $c[i, j] \leftarrow c[i, j-1]$
14. $b[i, j] \leftarrow$ "$\leftarrow$"
15. **return** b e c

L'algoritmo per la costruzione di una LCS

PrintLCS(b, X, i, j)

1. **if** $i = 0$ or $j = 0$ **then return**
2. **if** $b[i, j] =$ "$\nwarrow$"
3. **then PrintLCS**$(b, X, i-1, j-1)$
4. stampa x_i
5. **else if** $b[i, j] =$ "$\uparrow$"
6. **then PrintLCS**$(b, X, i-1, j)$
7. **else PrintLCS**$(b, X, i, j-1)$

La chiamata iniziale è **PrintLCS**$(b, X, length[X], length[Y])$

La procedura impiega $O(n+m)$, poichè almeno una delle due dimensioni coinvolte diminuisce ad ogni passo della ricorsione