Alberi binari: definizione e alcune proprietà

1 Alberi binari

Un albero binario è un albero con radice in cui ogni nodo ha al più due figli. In maniera più formale:

Definizione 1.1 *(Alberi binari)* Un albero binario è un insieme S di nodi tali che:

- S è vuoto, oppure
- un nodo speciale r è designato come radice e l'insieme $S - \{r\}$ è ripartito in due insiemi disgiunti che sono a loro volta degli alberi binari.

Un albero non vuoto deve quindi soddisfare le seguenti proprietà:

- contiene un nodo speciale detto *radice*
- ad ogni nodo possiamo associare (al più) due figli detti rispettivamente *figlio sinistro* e *figlio destro*. Se un nodo n è figlio di un nodo m, allora diciamo che m è *padre* di n.
- ogni nodo, tranne la radice, ha esattamente un padre. La radice è l'unico nodo che non ha un padre

Un cammino da un nodo n ad un altro nodo m è una sequenza di nodi connessi da archi che portano da n ad m. Sia n un nodo di un albero binario T con radice r. Un qualsiasi nodo m lungo un cammino dalla radice r ad n è detto *antenato* di m. Se m è antenato di n, allora n è un discendente di m (ogni nodo è antenato e discendente di se stesso).

Un nodo di un albero binario si dice *nodo esterno* o, pù semplicemente, *foglia* se non ha figli (entrambi i sottoalberi di cui è radice sono vuoti). Un nodo di un albero binario si dice *interno* se non è la radice ed ha almeno un figlio.

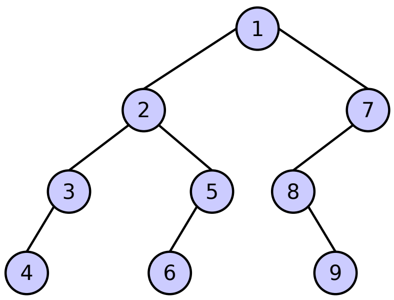

Figure 1: Un albero binario

Si consideri l'albero binario in Figura 1. Il nodo 6 è un discendente del nodo 2; il nodo 2, così come i nodi 1 e 5 sono antenati di 6. I nodi 4 6 e 9 sono delle foglia, tutti gli altri nodi sono dei nodi interni.

In un albero binario, la *profondità* di un nodo n è la lunghezza del cammino che porta dalla radice a quel nodo (cioè il numero di archi tra la radice ed il nodo n). La profondità massima di un nodo all'interno di un albero è detta *altezza* dell'albero.

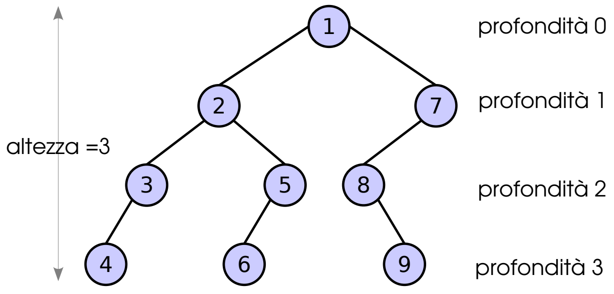

Figure 2: Un albero binario di altezza 3

1.1 Alberi binari completi e quasi completi

Definizione 1.2 *(Alberi binari completi e quasi completi)* Il *grado* di un nodo n è il numero di figli di quel nodo. Un albero binario si dice *completo* se:

1. tutte le foglie hanno la stessa profondità h;
2. tutti i nodi interni hanno grado 2 (hanno esattamente due figli).

Un albero binario si dice *quasi completo* se tutti i livelli, tranne al più l'ultimo, sono completi; nell'ultimo livello possono mancare alcune foglie consecutive a partire dall'ultima foglia a destra.

Alcuni esempi di alberi binari quasi completi sono riportati in Figura 3-(a) e (b). In Figura 3-(c) abbiamo invece un esempio di albero binario che non è quasi completo.

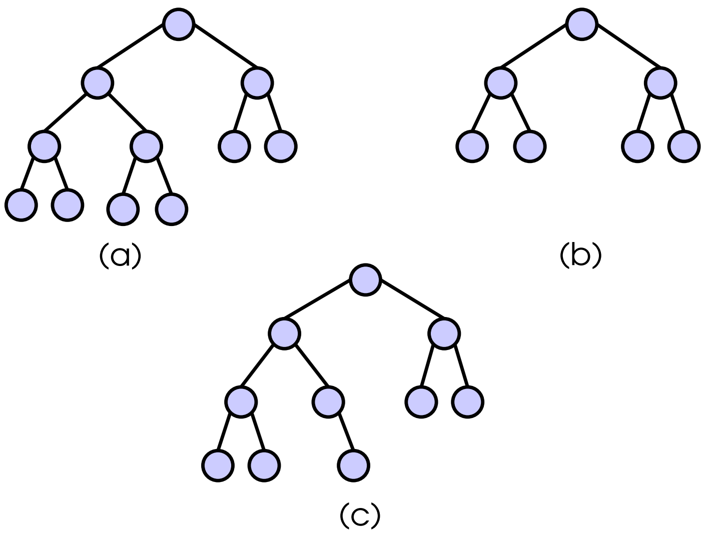

Figure 3: Alberi Binari e quasi-completezza

1.2 Proprietà degli alberi binari completi e quasi completi

Proposizione 1.3 Un *albero binario completo* di altezza h ha $2^{h+1} - 1$ nodi.

Dim: La prova è per induzione su h.

- *Caso base* ($h = 0$). Un albero binario completo di altezza $h = 0$ ha un solo nodo (la radice). Inoltre, $2^{0+1} - 1 = 1$. Quindi il caso base è verificato.

- *Passo induttivo:* ($h > 1$). Assumiamo (per ipotesi induttiva) che un albero binario completo di altezza h abbia $2^{h+1} - 1$ nodi, e dimostriamo che un albero binario T completo e di altezza $h + 1$ ha $2^{(h+1)+1} - 1 = 2^{h+2} - 1$ nodi. Come è fatto T? Ha la radice, più un sottoalbero sinistro T_s e un sottoalbero destro T_d entrambi completi e di altezza h. Per ipotesi induttiva $\#_{nodi}(T_d) = \#_{nodi}(T_s) = 2^{h+1} - 1$. Quindi:

  $$\#_{nodi}(T) = 1 + \#_{nodi}(T_s) + \#_{nodi}(T_d) = 1 + (2^{h+1} - 1) + (2^{h+1} - 1) = (2 \cdot 2^{h+1}) - 1 = 2^{h+2} - 1$$

$\square$

Esercizio 1.4 Dimostrate (di nuovo per induzione su h) che un albero binario completo di altezza h ha esattamente 2^h foglie.

Nel seguito cercheremo di stabilire alcune utili proprietà degli alberi binari quasi completi. Innanzitutto, vediamo la relazione che esiste tra il numero di nodi e l'altezza di un albero binario quasi completo.

Proposizione 1.5 Sia T un albero binario quasi completo di altezza h. Allora: $2^h \leq \#_{nodi}(T) \leq 2^{h+1} - 1$.

Dim: Per dimostrare questo risultato abbiamo bisogno di determinare il numero massimo e minimo di nodi di un albero binario quasi completo di altezza h. Il numero massimo di nodi che un albero binario quasi completo di altezza h può avere è pari al numero di nodi di albero binario completo di altezza h, ossia $max = 2^{h+1} - 1$ (vedi Proposizione 1.3). Ora osserviamo che l' albero binario quasi completo di altezza h con numero minimo di nodi è illustrato in Figura 4 forma (dove T_s e T_d sono degli alberi binari completi di altezza $h - 2$):

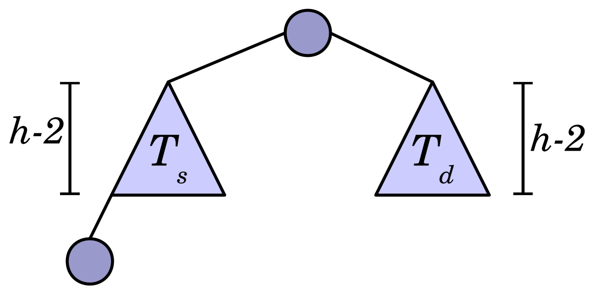

Figure 4: Alberi binari quasi completo con minimo numero di nodi

Allora: $\#_{nodi}(T) = 1 + 1 + \#_{nodi}(T_s) + \#_{nodi}(T_d)$ dove $\#_{nodi}(T_s) = \#_{nodi}(T_d) = 2^{h-1} - 1$ (questo perchè sia T_s che T_d sono degli alberi binari completi di altezza $h-2$). Quindi, $\#_{nodi}(T) = 2 + (2^{h-1} - 1) + (2^{h-1} - 1) = +2 \cdot 2^{h-1} = 2^h$

$\square$

Proposizione 1.6 L'altezza di un albero binario quasi completo T con n nodi è $h = \lfloor \log n \rfloor$.

Dim: Per la Proposizione 1.5 abbiamo che $2^h \leq n \leq 2^{h+1} - 1 < 2^{h+1}$, cioè $h \leq \log n < h + 1$ e, quindi, $h \leq \lfloor \log n \rfloor < h + 1$. Possiamo concludere che $h = \lfloor \log n \rfloor$ □

La seguente proposizione fornisce un limite superiore al numero di nodi di ciascun sottoalbero di un albero binario completo

Proposizione 1.7 Sia T un albero binario quasi completo con n nodi e siano T_s e T_d il sottoalbero sinistro e destro di T . Allora $\#_{nodi}(T_d) \leq \#_{nodi}(T_s) < 2/3n$.

Dim: Dalla definizione di albero binario quasi completo abbiamo che $\#_{nodi}(T_d) \leq \#_{nodi}(T_s)$ (per definizione, infatti un albero binario quasi completo o è completo oppure mancano delle foglie consecutive a partire dalla prima foglia a destra. Il sottoalbero "penalizzato" dalla non completezza è quindi il sottoalbero destro). Non ci resta che dimostrare che $\#_{nodi}(T_s) < 2/3n$. Analizziamo alcuni casi noti, a partire da quello descritto in Figura 5-(a) – albero binario completo di altezza h. In questo caso $\#_{nodi}(T_s)$ è meno della metà del numero di nodi complessivo, infatti

$$\#_{nodi}(T_s) = \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2} < \frac{2}{3}n$$

Cosa succede se aggiungiamo un'ulteriore nodo all'albero in Figura 5-(a) ottenendo così l'albero in Figura 5-(b)? In questo caso incrementiamo di una unità sia il numero di nodi complessivo che il numero di nodi di T_s ed $n = (2^{h+1} - 1) + 1 = 2^{h+1}$ e $\#_{nodi}(T_s) = (2^h - 1) + 1 = 2^h$. Quindi:

$$\#_{nodi}(T_s) = \frac{n}{2} < \frac{2}{3}n$$

In realtà, aggiungendo altri nodi nel sottoalbero sinistro, il rapporto tra $\#_{nodi}(T_s)$ ed n continua ad aumentare. Il caso peggiore si verfica quando aggiungiamo un altro livello completo di nodi al sottoalbero sinistro ottenendo l'albero in Figura 5-(c). In questo caso $\#_{nodi}(T_s) = 2^{h+1} - 1$ (T_s è un albero completo di altezza h) ed $n = 1 + \#_{nodi}(T_s) + \#_{nodi}(T_d) = 1 + (2^{h+1} - 1) + (2^h - 1) = 2^{h+1} + 2^h - 1 = 2^h \cdot (2 + 1) - 1 = 3 \cdot 2^h - 1$. Quindi:

$$\#_{nodi}(T_s) = 2^{h+1} - 1 = \frac{2}{3}(3 \cdot 2^h) - 1 < \frac{2}{3}(3 \cdot 2^h) - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(3 \cdot 2^h - 1) = \frac{2}{3}n$$

Osserviamo ora che aggingere uno o più nodi all'albero in Figura 5-(c) (ottenendo, ad esempio l'albero in Figura 5-(d)) significa aumentare il numero di nodi complessivo, ma non il numero dei nodi di T_s che rimane invariato (altri nodi possono essere aggiunti solo nel sottoalbero destro). In altri termini, abbiamo che $\#_{nodi}(T_s) = 2^{h+1} - 1$ ma $n > 3 \cdot 2^h - 1 \geq 3 \cdot 2^h$. Allora:

$$\#_{nodi}(T_s) = 2^{h+1} - 1 = 2 \cdot 2^h - 1 = \frac{2}{3}(3 \cdot 2^h) - 1 < \frac{2}{3}(3 \cdot 2^h) \leq \frac{2}{3}n$$

Se aggiungiamo tutti i nodi necessari a completare anche l'ultimo livello del sottoalbero destro, otteniamo un albero della forma già descritta in Figura 5-(a), ossia un albero binario completo.

□

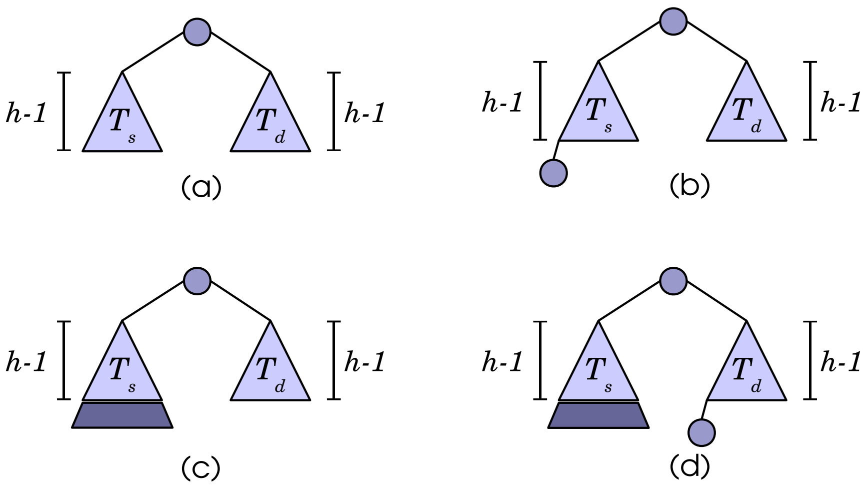

Figure 5: Numero di nodi di T_s