Algoritmi e Strutture Dati

Alberi Rosso-Neri (RB-Trees)

Maria Rita Di Berardini, Emanuela Merelli[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Camerino

Alberi Rosso-Neri

- Un albero Rosso Nero (Red Black Tree, RB tree) è un albero binario di ricerca in cui ad ogni nodo viene associato un colore (**rosso** o **nero**)
- Ogni nodo di un RB tree ha quattro campi: *key*, *left*, *right* e *p* (come nel caso degli alberi di ricerca ordinari) + *color*
- Vincolando il modo in cui possiamo colorare i nodi lungo un qualsiasi percorso che va dalla radice ad una foglia, riusciamo a garantire che l'abero sia *approssivatimente bilanciato*

Alberi bilanciati

Definizione (*fattore di bilanciamento*): sia T un albero binario e v un nodo dili T. Il fattore di bilanciamento $\beta(v)$ di v è definito come la differenza tra l'altezza del suo sottoalbero sinistro e quella del suo sottoalbero destro

$$\beta(v) = altezza[left[v]] - altezza[right[v]]$$

Definizione (*bilanciamento in altezza*): un albero è bilanciato in altezza se, per ogni nodo v, $|\beta(v)| \leq 1$

Alberi Rosso-Neri: proprietà

Un RB tree è un albero binario di ricerca che soddisfa le seguenti proprietà (dette RB-properties):

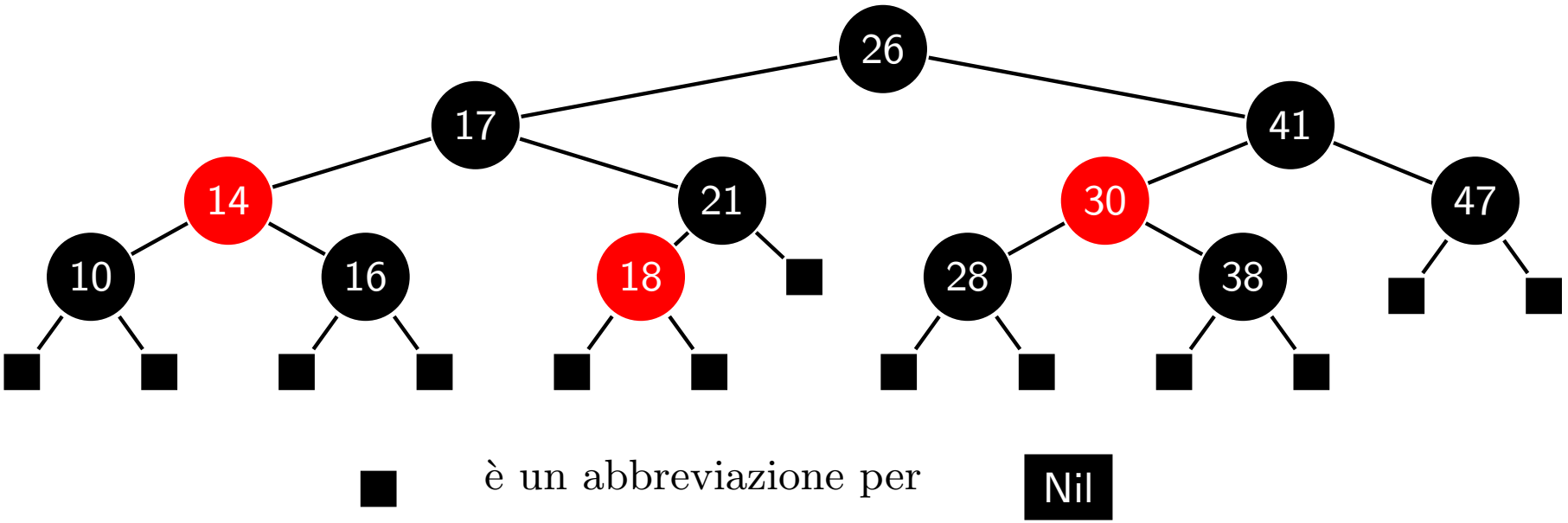
1. ogni nodo è rosso o **nero**
2. la radice è **nera**
3. ogni foglia è **nera**
4. se un nodo è rosso, entrambi i suoi figli devono essere **neri**
5. per ogni nodo n, **tutti** i percorsi da n ad una qualsiasi delle sue foglie discendenti contengono lo stesso numero di nodi neri

Alberi Rosso-Neri: proprietà

(1) ogni nodo è rosso o **nero**

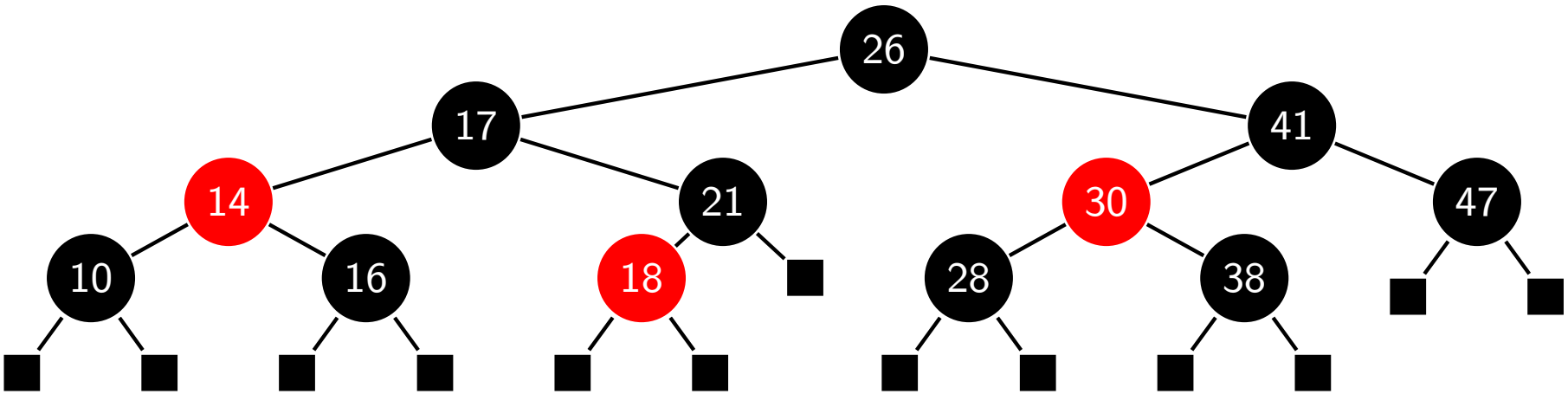
(2) la radice è **nera**

(3) ogni foglia (rappresentata dal Nil) è **nera**



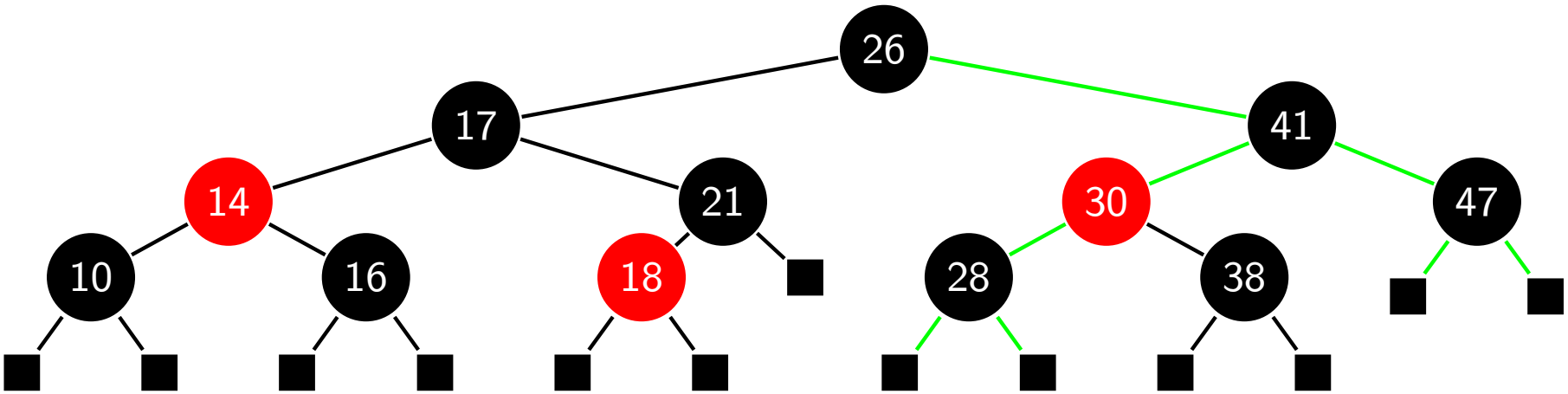
Alberi Rosso-Neri: proprietà

(4) se un nodo è rosso entrambi i suoi figli sono neri



Alberi Rosso-Neri: proprietà

(5) per ogni nodo n, tutti i percorsi da n ad una qualsiasi delle sue foglie discendenti contengono lo stesso numero di nodi neri



Alberi Rosso-Neri: un esempio

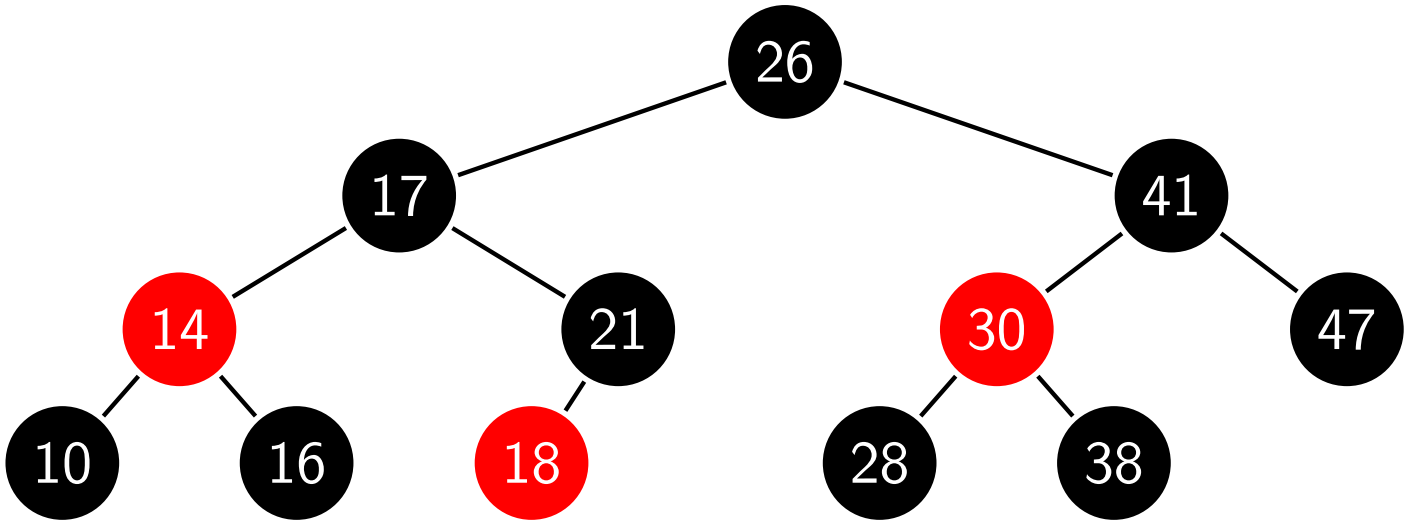


Figura: **Una versione semplificata (foglie omesse)**

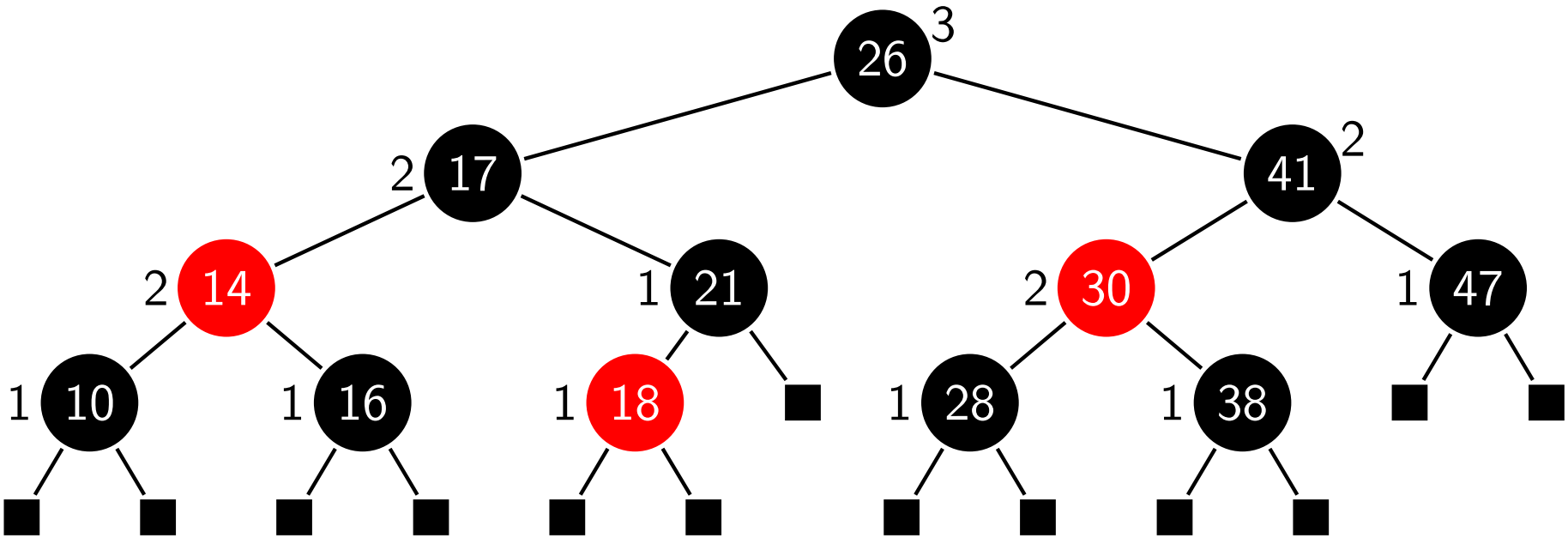
Altezza nera di un RB tree

Definizione Sia T un RB tree. L'altezza nera $bh(x)$ di un nodo x di T è pari al numero di nodi neri (x escluso) che si incontrano lungo un cammino da x ad una delle sue foglie discendenti.

L' altezza nera dell'albero è definita come l'altezza nera della sua radice r, ossia $bh(T) = bh(r)$

N.B. per la proprietà 5, il concetto di altezza nera è ben definito, in quanto tutti i percorsi che scendono da un nodo contengono lo stesso numero di nodi neri

Alberi Rosso-Neri: altezza nera



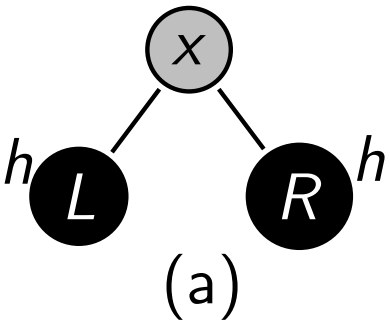
Altezza nera: alcune proprietà

Sia x un nodo di un RB tree e p il padre di x (ossia, $p = p[x]$). Allora:

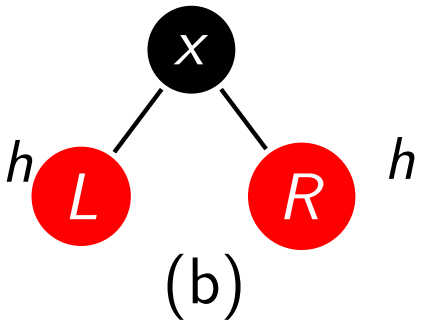
1. x rosso implica $bh(x) = bh(p)$;
2. x nero implica $bh(x) = bh(p) - 1$;
3. $bh(x) \geq bh(p) - 1$.

Calcolo dell'altezza nera di x

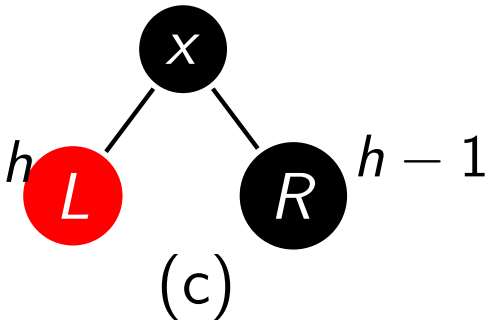
- $bh(x) = 0$



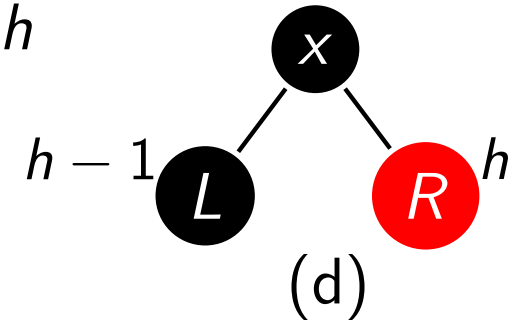
(a) $bh(x) = h + 1$



(b) $bh(x) = h$



(c) $bh(x) = h$



(d) $bh(x) = h$

Un paio di risultati utili

Lemma 1: Il numero di nodi interni di un sottoalbero radicato in x è maggiore o uguale di $2^{bh(x)} - 1$.

Teorema 1: L'altezza massima di un RB tree con n nodi interni è $2\log(n+1)$.

Un paio di risultati utili

Lemma 1: Il numero di nodi interni di un sottoalbero radicato in x è maggiore o uguale di $2^{bh(x)} - 1$

Proof: Procediamo per induzione sull'altezza h di x.

Denotiamo con $int(x)$ il numero dei nodi interni del sottoalbero radicato in x.

- $h = 0$ e quindi x è una foglia (i.e. $x = Nil$).
  In questo caso $int(x) = 0$ e $bh(x) = 0$. Quindi:

$$int(x) = 0 \geq 2^{bh(x)} - 1 = 2^0 - 1 = 0$$

Un paio di risultati utili

- $h > 0$. In questo caso x ha due figli $l = left[x]$ ed $r = right[x]$ (non entrambi Nil). Inoltre $bh(l), bh(r) \geq bh(x) - 1$.

  Per ipotesi induttiva:
  $int(l) \geq 2^{bh(l)} - 1 \geq 2^{bh(x)-1} - 1$
  e
  $int(r) \geq 2^{bh(r)} - 1 \geq 2^{bh(x)-1} - 1$. Allora:

$$\begin{aligned} int(x) &\geq 1 + int(l) + int(r) \\ &\geq 1 + (2^{bh(x)-1} - 1) + (2^{bh(x)-1} - 1) \\ &= 2 \cdot 2^{bh(x)-1} - 1 \\ &= 2^{bh(x)} - 1 \end{aligned}$$

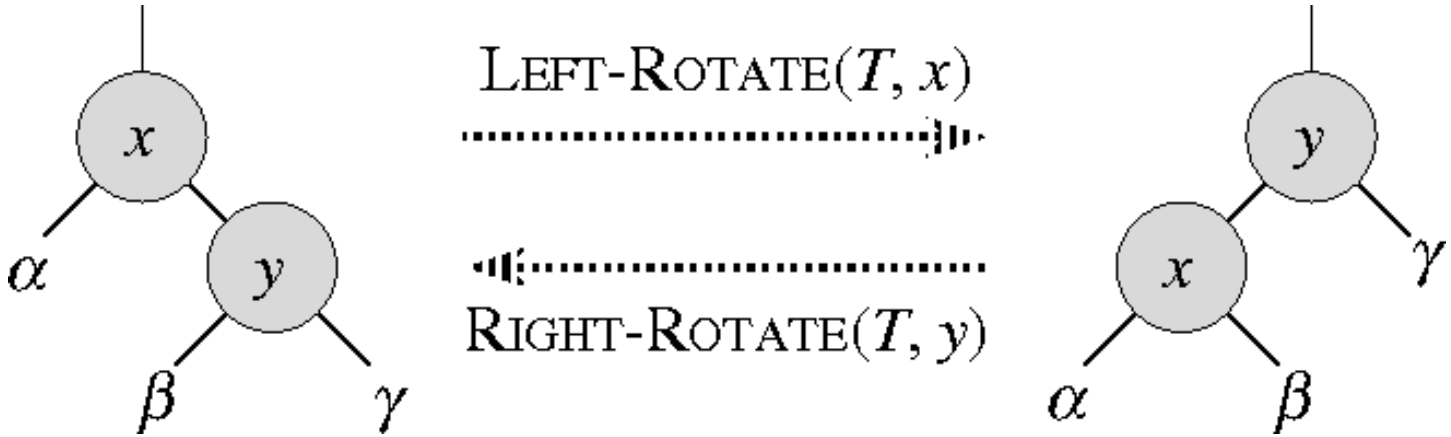
Un paio di risultati utili

Teorema 2: L'altezza massima di un RB tree con n nodi interni è $2\log(n+1)$.
Proof:

- sia h l'altezza dell'albero
- per la un Prop. 4, almeno la metà dei nodi in un qualsiasi cammino dalla radice ad una foglia (esclusa la radice) devono essere neri (dopo ogni nodo rosso c'è almeno un nodo nero)
- di conseguenza, $bh(T) = bh(root) \geq h/2$
- Per il Lemma 1, $n = int(T) \geq 2^{bh(T)} - 1 \geq 2^{h/2} - 1$, ossia $2^{h/2} \leq n+1$
- Allora: $h/2 \leq \log(n+1)$ e $h \leq 2\log(n+1)$

Rotazioni

Sono delle operazioni di ristrutturazione locale dell'albero



Operazioni su RB trees

Vediamo nel dettaglio le operazioni di **inserimento** e **cancellazione** di un nodo

Le operazioni **Search**, **Minimum** e **Maximum**, **Successor** e **Predecessor** possono essere implementate esattamente come per gli alberi binari di ricerca "ordinari"

Inserimento di un nodo z

- Come per gli alberi binari di ricerca, l'inserimento di un nodo z in un RB tree cerca un cammino dalla root dell'albero fino al nodo p che diventerà suo padre

Inserimento di un nodo z

- Come per gli alberi binari di ricerca, l'inserimento di un nodo z in un RB tree cerca un cammino dalla root dell'albero fino al nodo p che diventerà suo padre
- Una volta identificato p, z viene aggiunto come figlio sinistro (se $key[z] < key[p]$) o destro (se $key[z] > key[p]$) di p e colorato di **rosso**

Inserimento di un nodo z

- Come per gli alberi binari di ricerca, l'inserimento di un nodo z in un RB tree cerca un cammino dalla root dell'albero fino al nodo p che diventerà suo padre
- Una volta identificato p, z viene aggiunto come figlio sinistro (se $key[z] < key[p]$) o destro (se $key[z] > key[p]$) di p e colorato di **rosso**
- Questo inserimento può causare una violazione della:
  - proprietà 2, se z viene inserito in un albero vuoto
  - proprietà 4, se z viene aggiunto come figlio di un nodo rosso

Inserimento di un nodo z

- Come per gli alberi binari di ricerca, l'inserimento di un nodo z in un RB tree cerca un cammino dalla root dell'albero fino al nodo p che diventerà suo padre
- Una volta identificato p, z viene aggiunto come figlio sinistro (se $key[z] < key[p]$) o destro (se $key[z] > key[p]$) di p e colorato di **rosso**
- Questo inserimento può causare una violazione della:
  - proprietà 2, se z viene inserito in un albero vuoto
  - proprietà 4, se z viene aggiunto come figlio di un nodo rosso
- La procedura RB-Insert-Fixup(T, z) (dove z è il nodo che da luogo alla violazione) ci consente di ripristinare le proprietà dei RB trees

RB-Insert-Fixup(T, z)

La RB-Insert-Fixup(T, z) ripristina:

- la prop 2 colorando la root z (rossa) di nero
- la prop 4, eseguendo delle **rotazioni** e **ricolorazioni** su z.

RB-Insert-Fixup(T, z)

La RB-Insert-Fixup(T, z) ripristina:

- la prop 2 colorando la root z (rossa) di nero
- la prop 4, eseguendo delle **rotazioni** e **ricolorazioni** su z.

  Decidiamo cosa fare confrontando il colore di z (il nodo che viola la proprietà 4) con quello di suo **zio** y.

RB-Insert-Fixup(T, z)

La RB-Insert-Fixup(T, z) ripristina:

- la prop 2 colorando la root z (rossa) di nero
- la prop 4, eseguendo delle **rotazioni** e **ricolorazioni** su z.

  Decidiamo cosa fare confrontando il colore di z (il nodo che viola la proprietà 4) con quello di suo **zio** y.

  Distinguiamo tre possibili casi:

  1. lo zio y di z è rosso
  2. lo zio y di z è nero e z è un figlio destro
  3. lo zio y di z è nero e z è un figlio sinistro

Caso 1: lo zio y di z è rosso

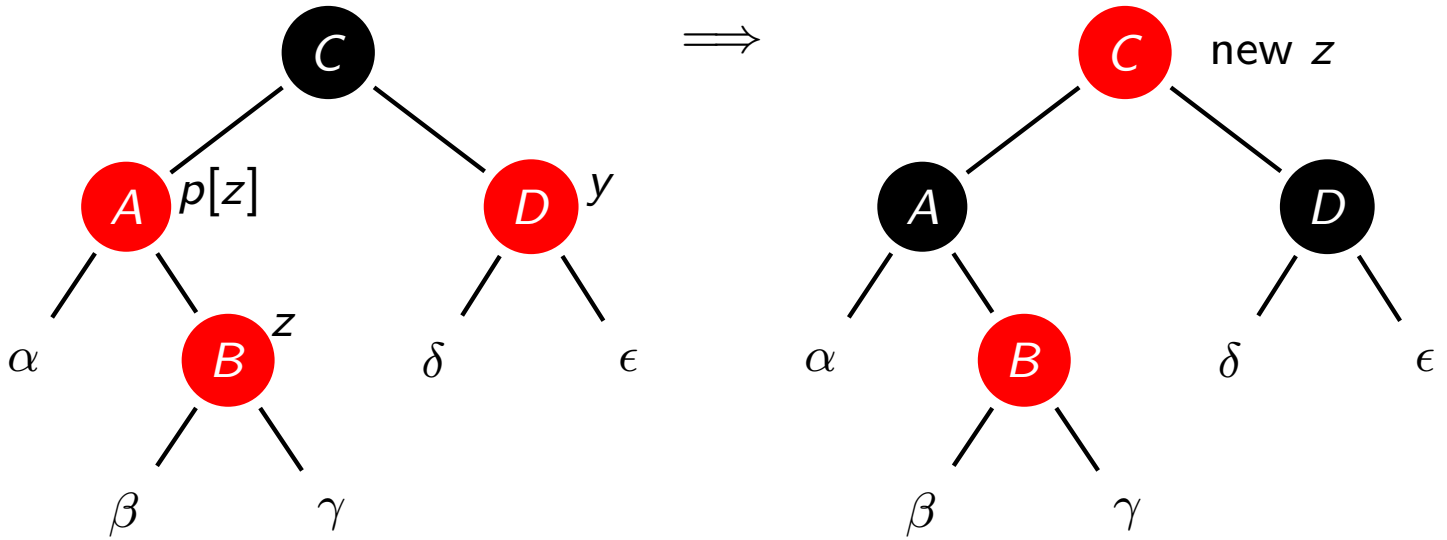


Figura: **in questo caso, y e $p[z]$ diventano neri e $p[p[z]$ diventa rosso. Inoltre $p[p[z]$ diventa il nuovo z dato che il suo cambiamento di colore potrebbe aver causato una violazione della proprietà 4**

Caso 2: lo zio y di z è nero e z è un figlio sinistro

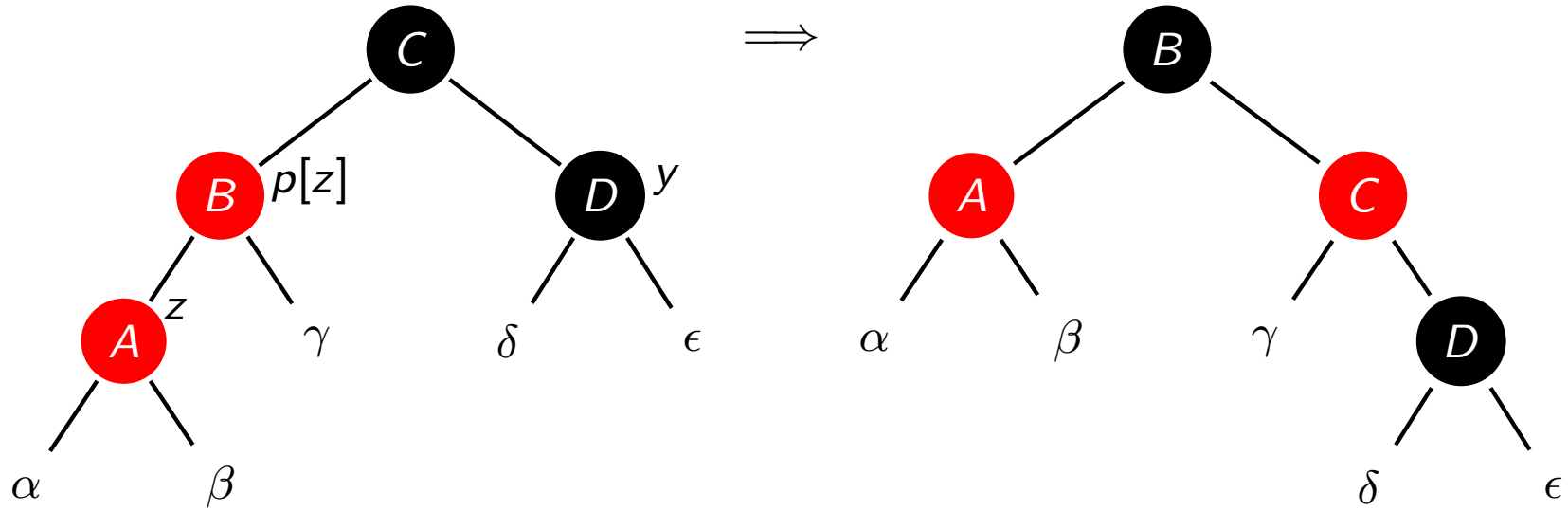


Figura: B **(i.e.** $p[z]$**) diventa nero;** C **(i.e.** $p[p[z]]$**) diventa rosso; ruotiamo** C **a destra**

Caso 3: lo zio y di z è nero e z è un figlio destro

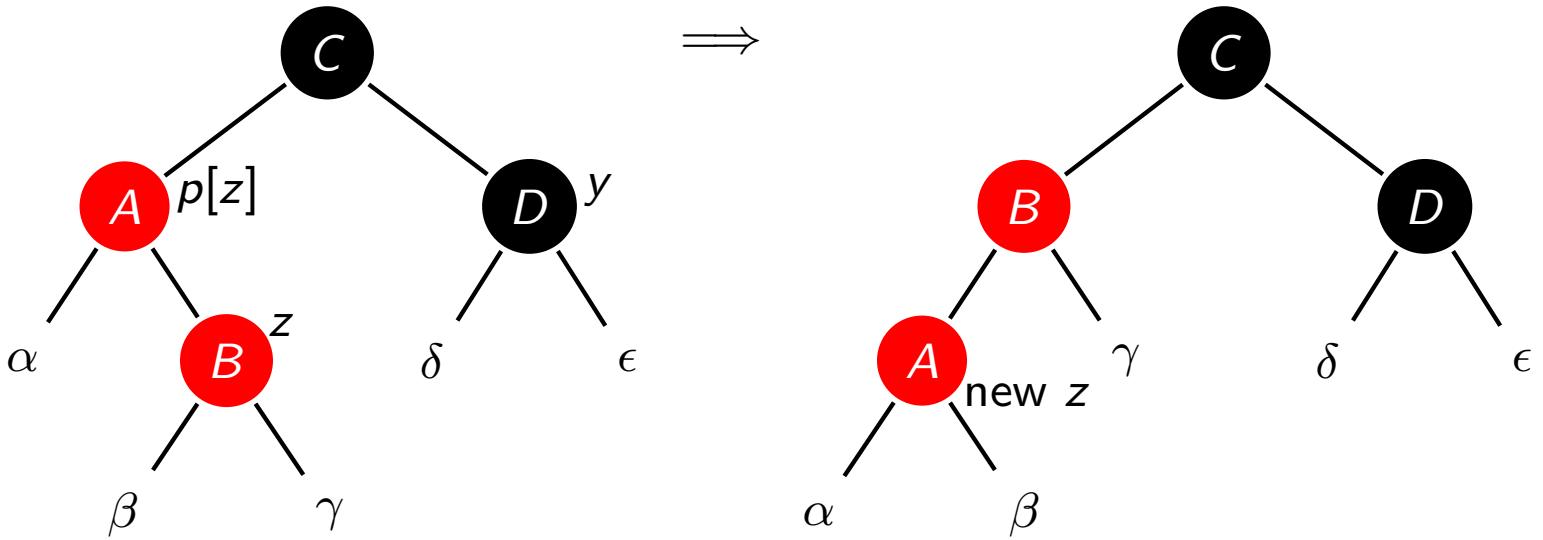


Figura: **viene ricondotto al caso 2 ruotando A, i.e. $p[z]$ a sinistra. A questo punto non ci resta che colorare C di rosso, B di rosso e ruotare C a destra**

Caso 3: lo zio y di z è nero e z è un figlio destro

Attenzione alle simmetrie!!!

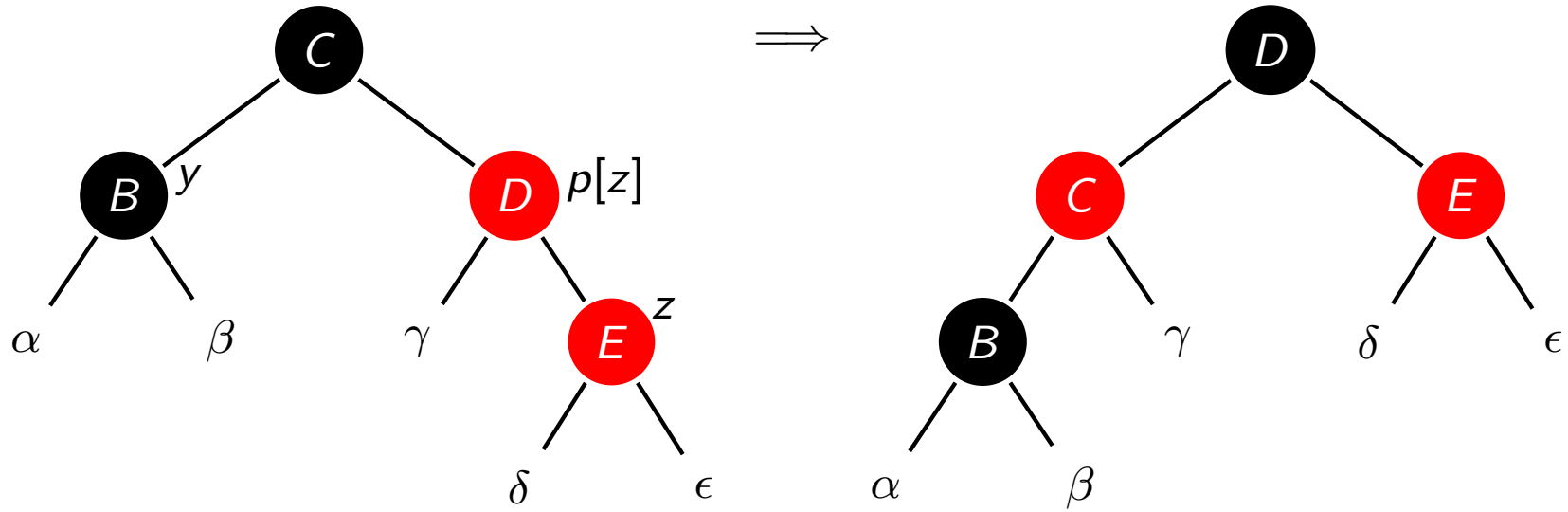


Figura: D **(i.e.** $p[z]$**) diventa nero;** C **(i.e.** $p[p[z]]$**) diventa rosso; ruotiamo** C **a sinistra**

Caso 2: lo zio y di z è nero e z è un figlio sinistro

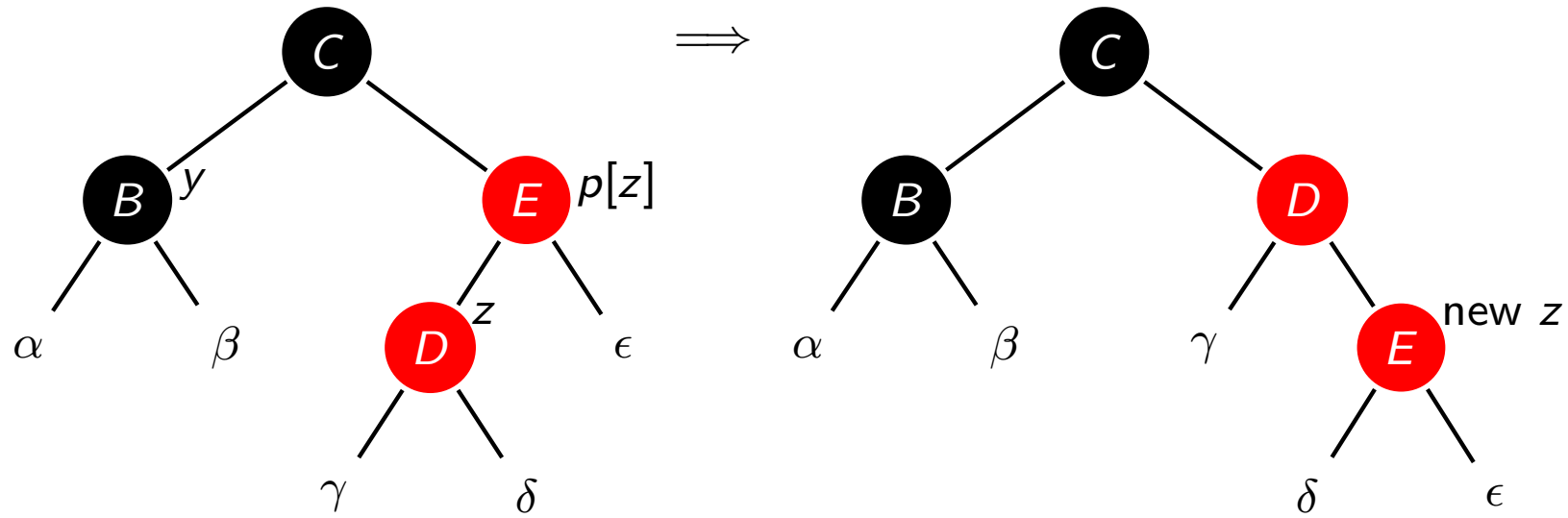


Figura: **ruotiamo E a destra ed E diventa il nuovo z. Osservate che, dopo la rotazione, z è un figlio destro di un nodo – D – che a sua volta è un figlio destro**

Analisi

- RB-Insert-Fixup(T, z) richiede un tempo $O(\log_2 n)$
- Di conseguenza, anche RB-Insert(T, z) richiede un tempo $O(\log_2 n)$

Inserimento: un esercizio

Figura: **inserimento di 41 e 38**

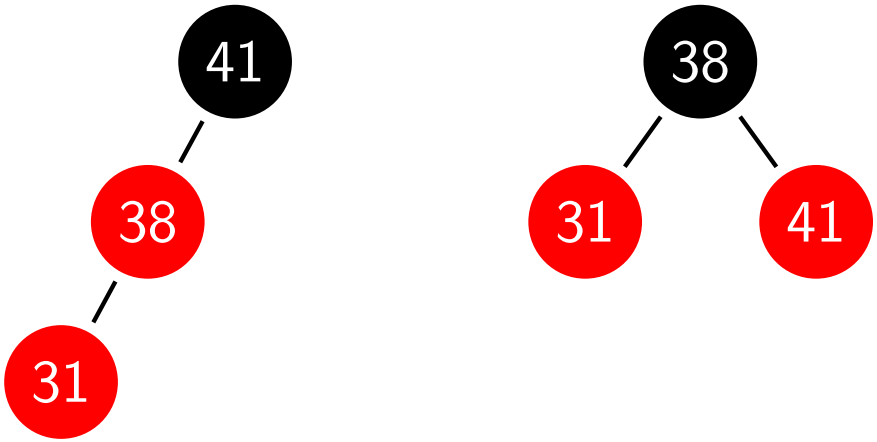


Figura: **inserimento di 31**

Inserimento: un esercizio

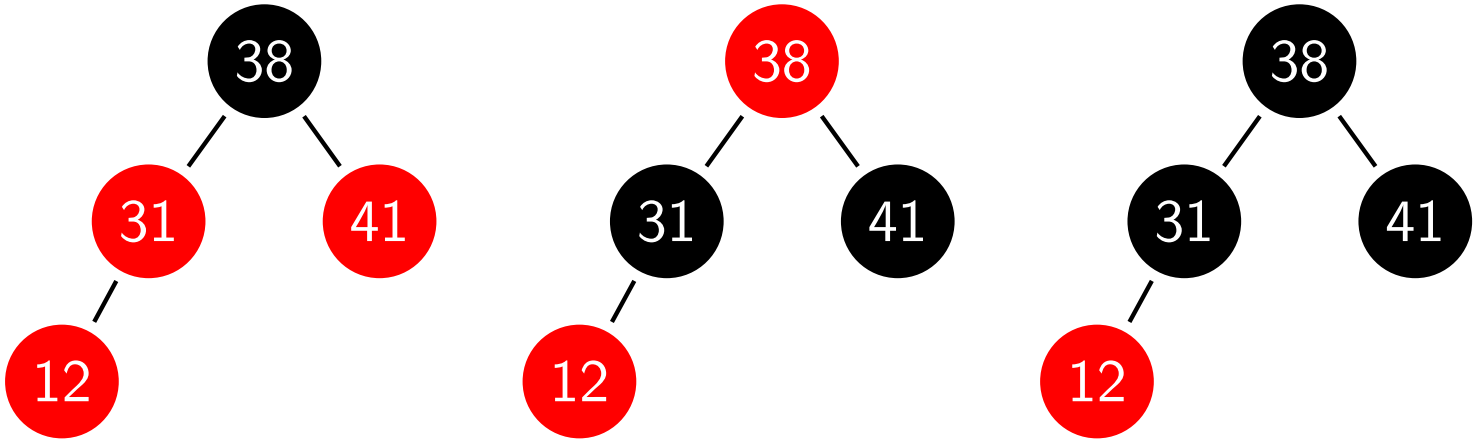


Figura: **inserimento di 12**

Inserimento: un esercizio

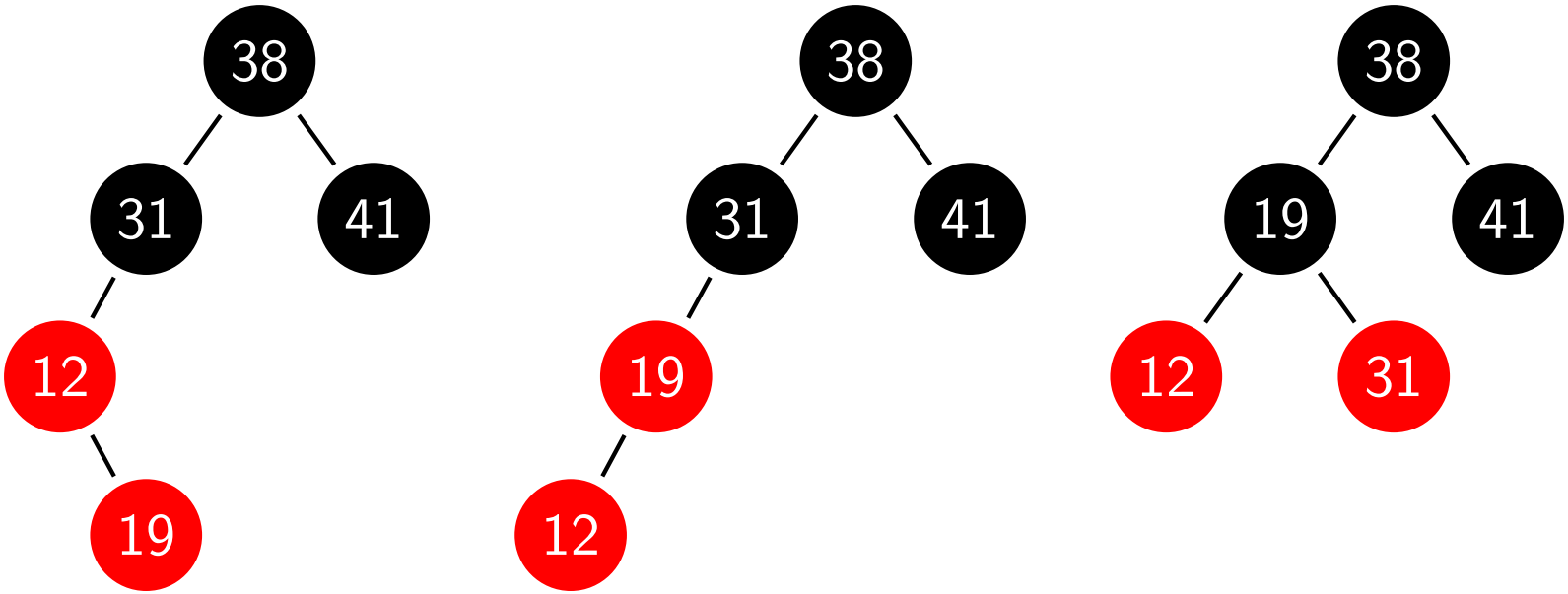


Figura: **inserimento di 19**

Inserimento: un esercizio

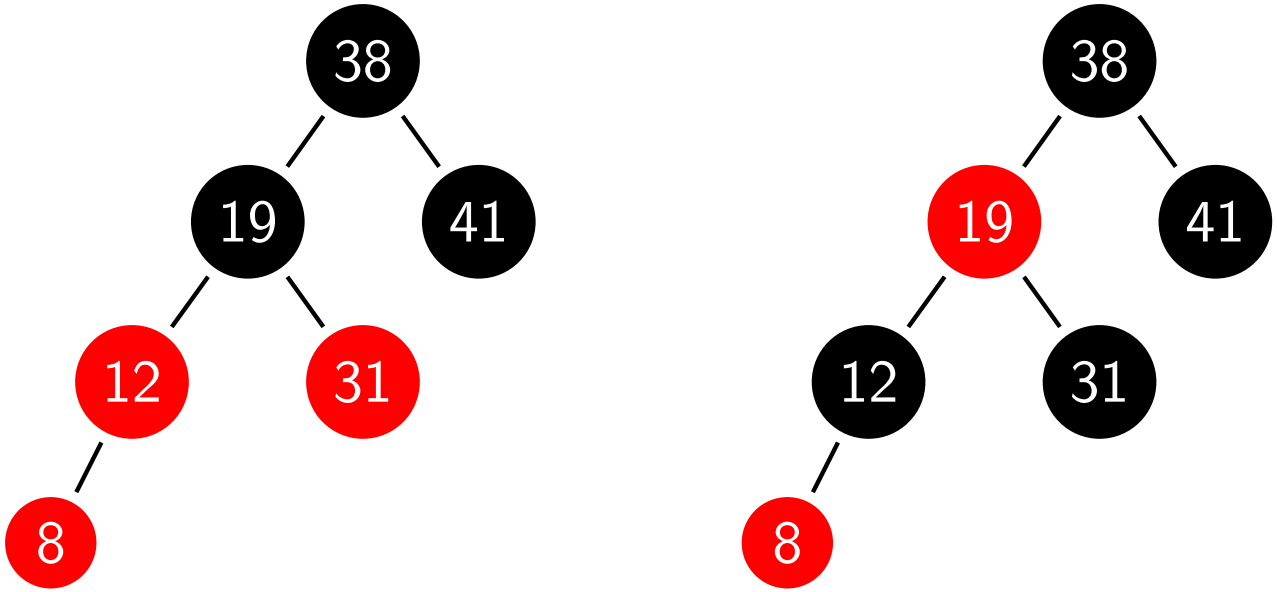


Figura: **inserimento di 8**

Cancellazione di un nodo con due figli

Osservazione: assumiamo sempre di dover eliminare un nodo che ha al più un figlio

Infatti, nel caso in cui il nodo z da eliminare ha due figli, possiamo sostituire la chiave di z con quella di $y = \textsc{Tree-Successor}(T, z)$ (il successore di z), e poi rimuovere y

Poichè z è un nodo con due figli, il suo successore y è il nodo più a sinistra del sottoalbero destro; (ha al più il figlio destro)

Cancellazione di un nodo con al più un figlio

Sia z il nodo da cancellare

Siano, inoltre, x l'unico figlio e p il padre di z (se z è una foglia, allora x è $\textsc{Nil}$). Per eliminare z, eseguiamo i seguenti passi:

1. inanzitutto, rimuoviamo z collegando p con x (p diventa il padre di x ed x diventa il figlio di p);
2. z era rosso: possiamo semplicemente terminare perchè l'eliminazione di z non causa violazioni delle RB-properties
3. z **era nero**: potremmo causare una violazione della proprietà 5

Eliminazione: z rosso

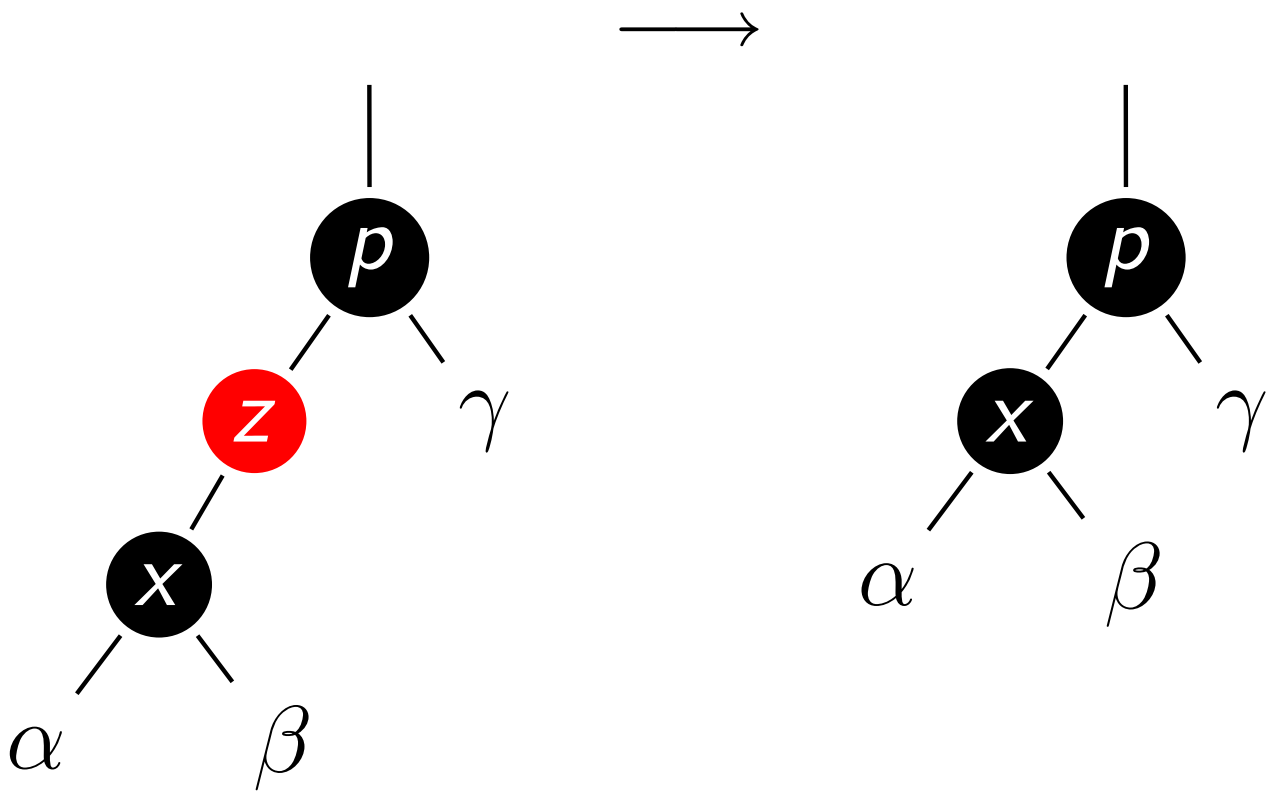


Figura: **Eliminare un nodo rosso non causa violazioni delle RB-properties**

Eliminazione: z nero e suo figlio x rosso

Se z è nero, suo padre p può essere sia nero che rosso (indichiamo questo fatto colorando p di grigio)

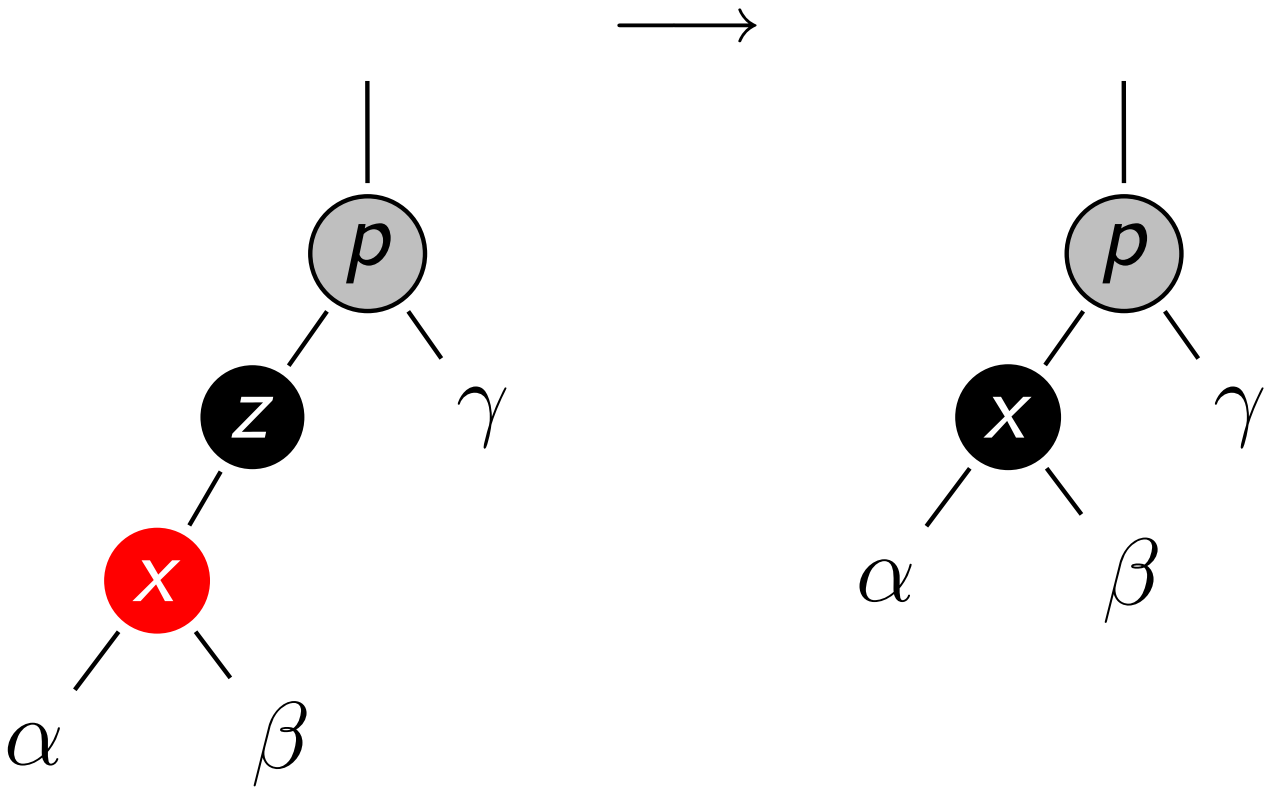


Figura: **Il figlio rosso di z acquisisce un "extra credito" diventando nero**

Eliminazione: z nero e suo figlio x nero

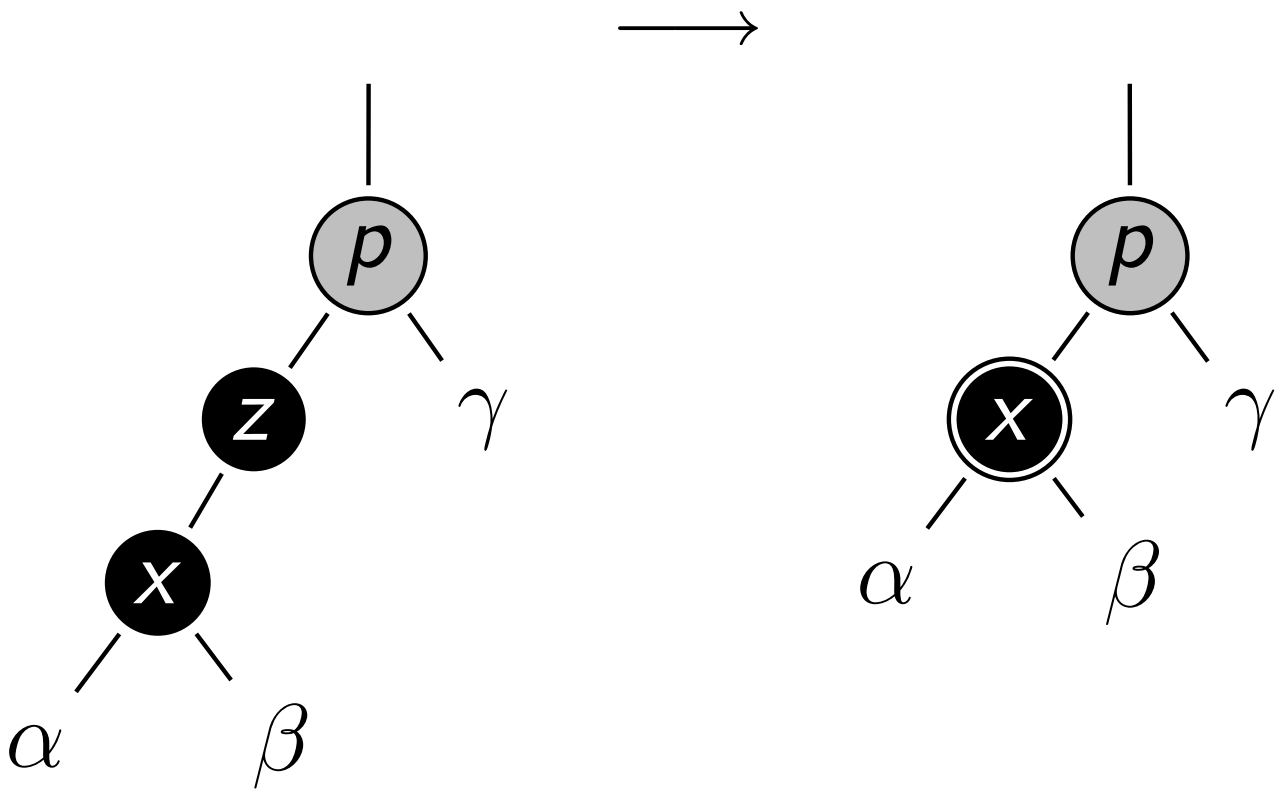


Figura: **Il figlio nero di z acquisisce un extra credito diventando "doppio nero". Eseguiamo RB-Delete-FixUp(T, x) per ripristinare la proprietà 5**

Cancellazione di un nodo con al più un figlio

Per ristabilire la proprietà 5 nel caso di eliminazione di un nodo z nero), si attribuisce al nodo x (figlio di z) un extra credito

Questo significa che se x è rosso lo coloriamo di nero, mentre se x è gia nero assume un colore fittizio detto **doppio nero**, che serve per ricordarci che abbiamo collassato due nodi neri in uno. Nel calcolo della black-height un nodo doppio nero conta due volte

Infine, eseguiamo la procedura $\text{RB-DELETE-FIXUP}(T, x)$ che spingerà, mediante rotazioni e ricolorazioni, l'extra credito verso la radice dove verrà ignorato

Se lungo il cammino verso la radice incontriamo un nodo rosso, esso sarà semplicemente colorato di nero

RB-Delete-Fixup(T,x)

Nel ripristinare la proprietà 5, teniamo conto di una serie di casi (ottenuti confrontando il colore di x con quello di suo fratello w)

1. w è nero ed ha almeno un figlio rosso. Possiamo distinguere ulteriori due sottocasi:
   - 1.1 il figlio destro di w è rosso
   - 1.2 il figlio sinistro di w è rosso e quello destro è nero
2. w è nero ed ha entrambi i figli neri. Anche in questo caso distinguiamo due possibili sottocasi
   - 2.1 il nodo $p[x]$ (che è anche il padre di w) è rosso
   - 2.2 il nodo $p[x]$ è nero
3. w è rosso

Caso 1.1: w nero e figlio destro di w rosso

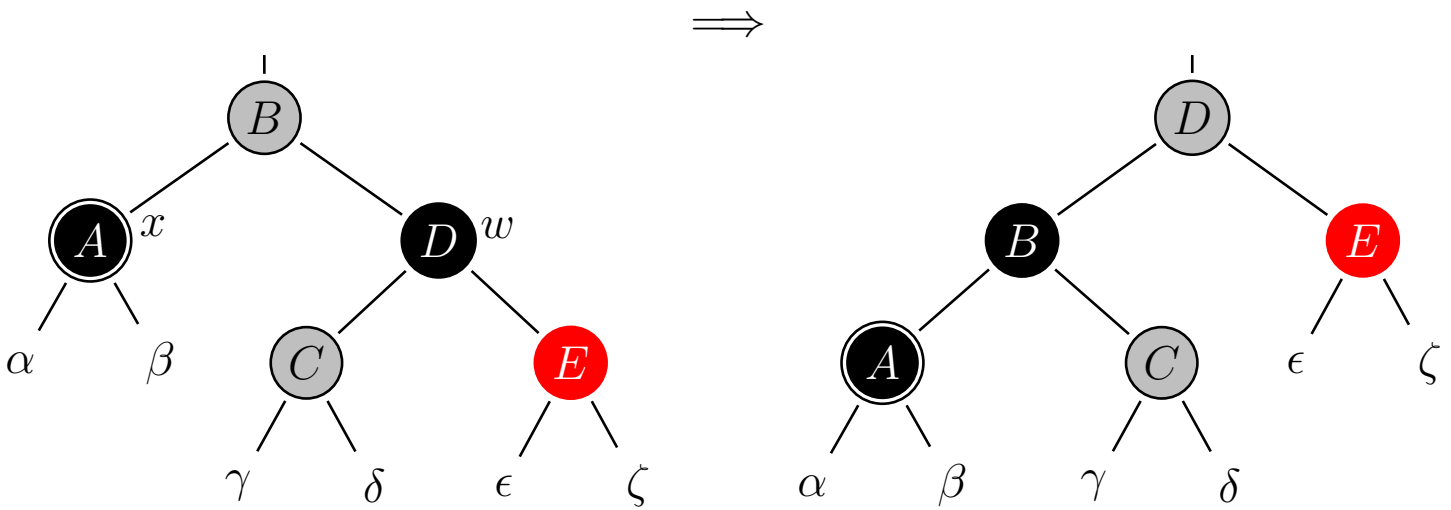


Figura: **scambiamo il colore del $p[x]$ con quello di w; poi, ruotiamo il $p[x]$ a sinistra**

1. abbiamo aggiunto un nodo nero a sinistra e quindi possiamo togliere il doppio nero da x)
2. eliminato un livello nero a destra; coloriamo E di nero

Caso 1.1: w nero e figlio destro di w rosso

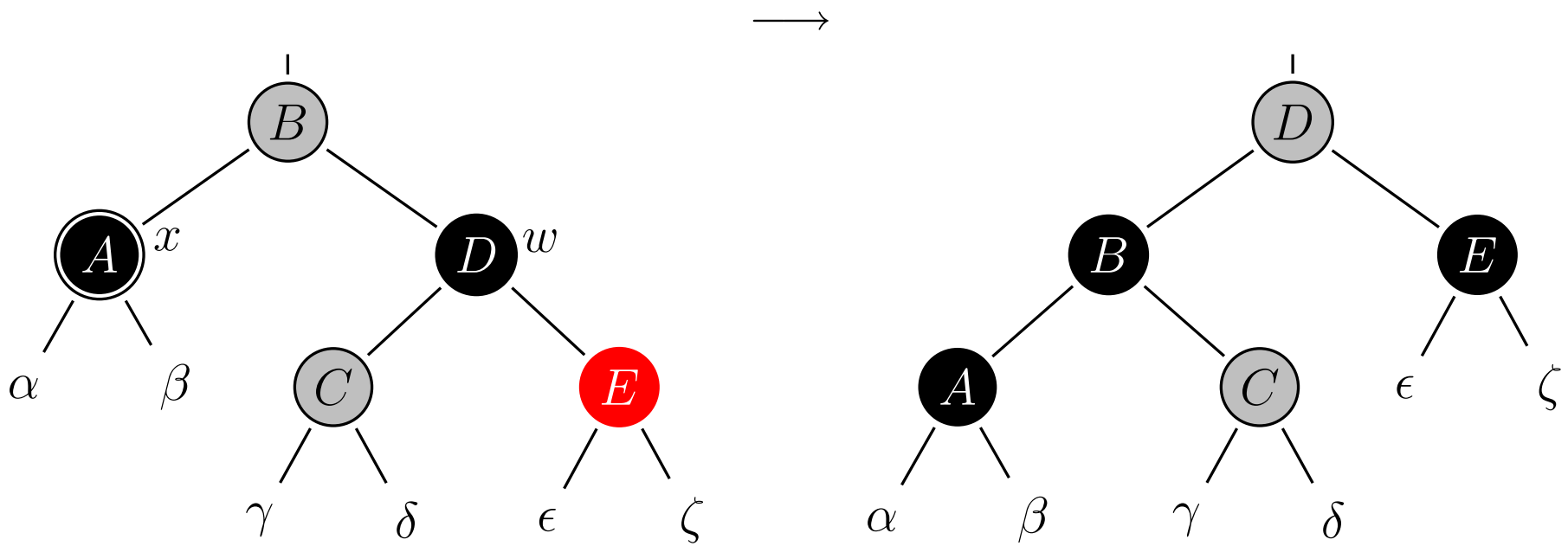


Figura: **eliminamo l'extra nero rappresentato da x colorando B (il padre di x) ed E (il figlio destro di w) di nero e ruotando B a sinistra**

RB-Delete-Fixup, caso 1.2: w è nero, il figlio sinistro di w è rosso e quello destro è nero

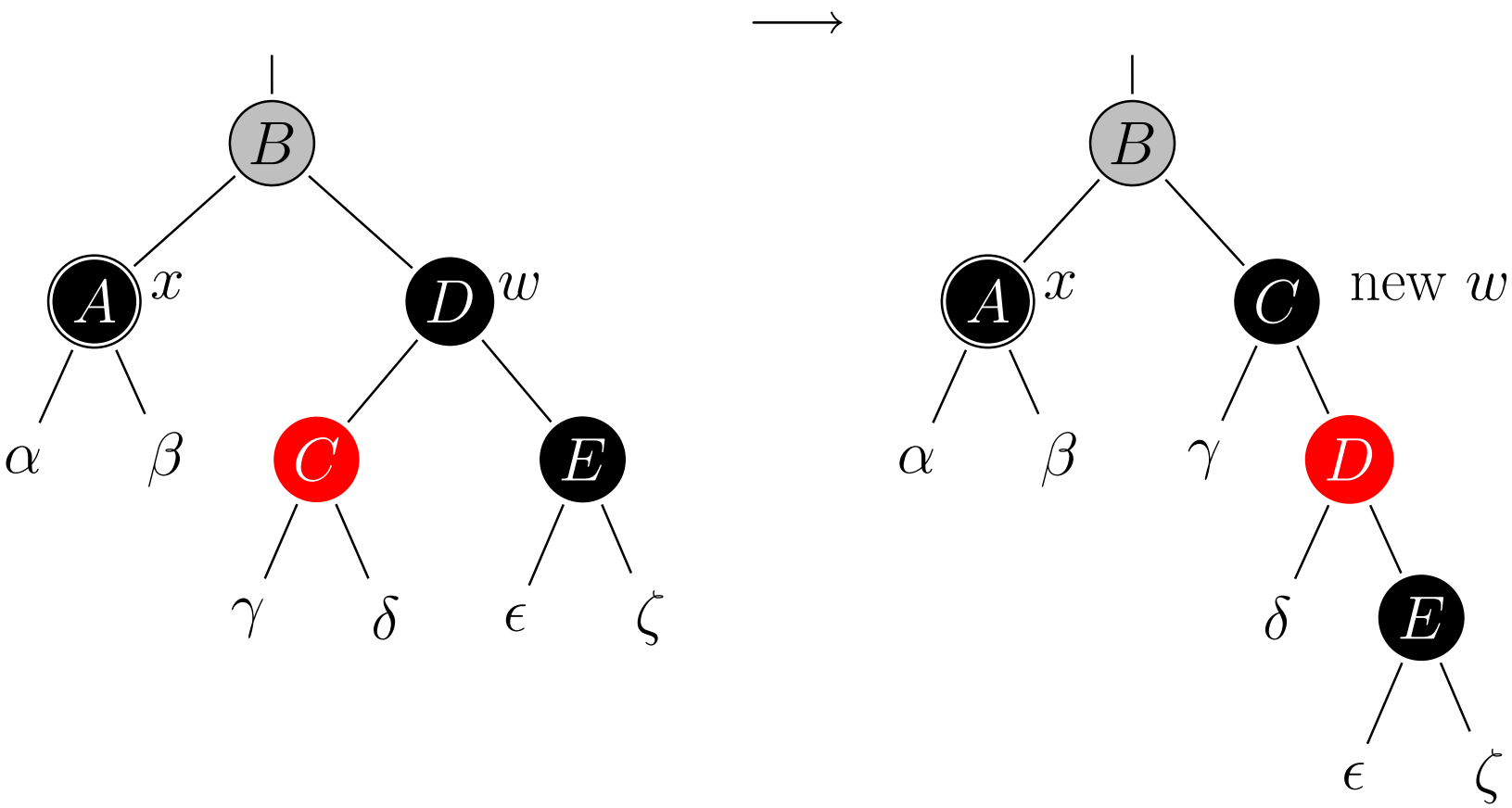


Figura: **questo caso è trasformato nel caso 1.1 colorando C (i.e. $left[w]$) di nero, D (i.e. w) di rosso e ruotando D a destra**

RB-Delete-Fixup, caso 2.1: w ha entrambi i figli neri e $p[x]$ è rosso

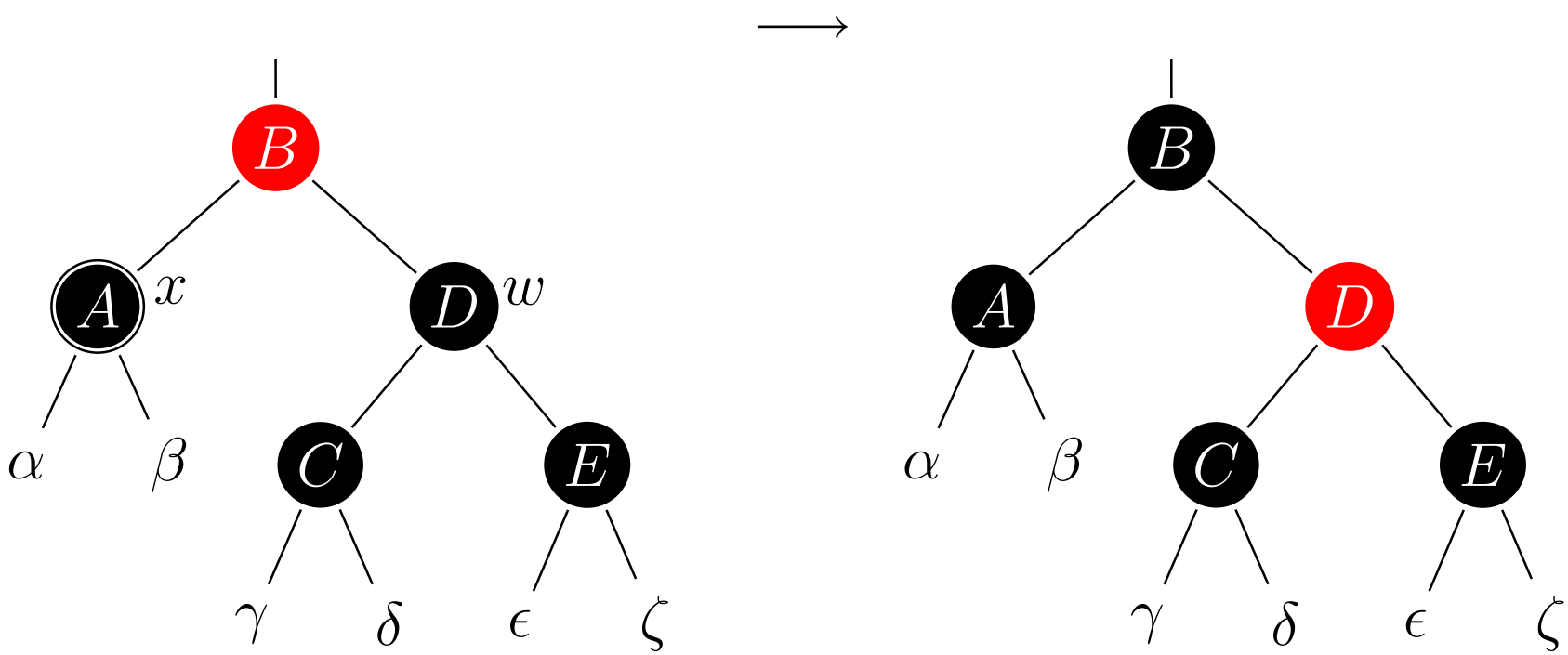


Figura: **eliminamo il doppio nero del nodo x togliendo un credito nero sia ad A che a D (quindi A diventa nero ordinario e D diventa rosso) e facendo acquisire un extra credito a B (il padre di x) che da rosso diventa nero**

RB-Delete-Fixup, caso 2.2: w ha entrambi i figli neri e $p[x]$ è nero

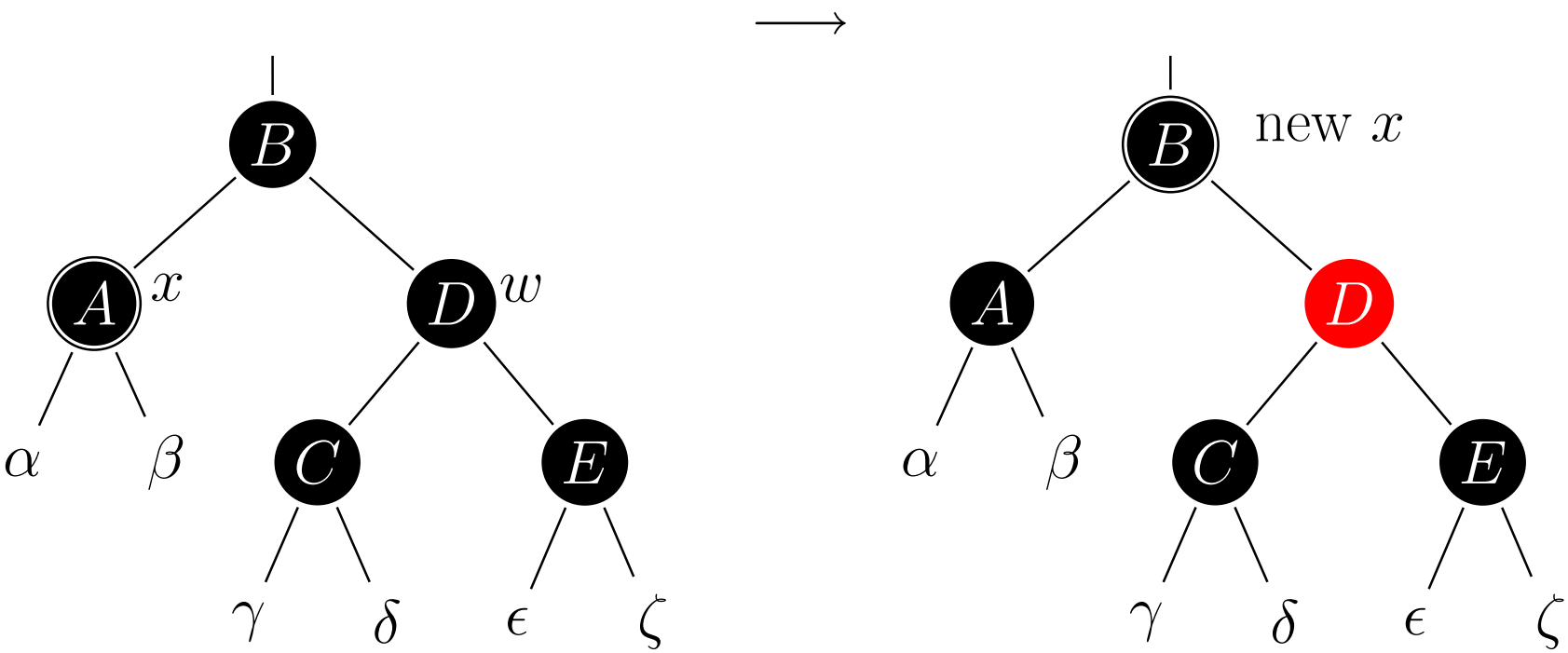


Figura: **è simile al caso 3.1, di nuovo togliamo un credito nero sia ad A che a D (A diventa nero ordinario e D diventa rosso) e facendo acquisire un extra credito a B che da nero diventa doppio-nero. A questo punto B diventa il nuovo x**

RB-Delete-Fixup: caso 3

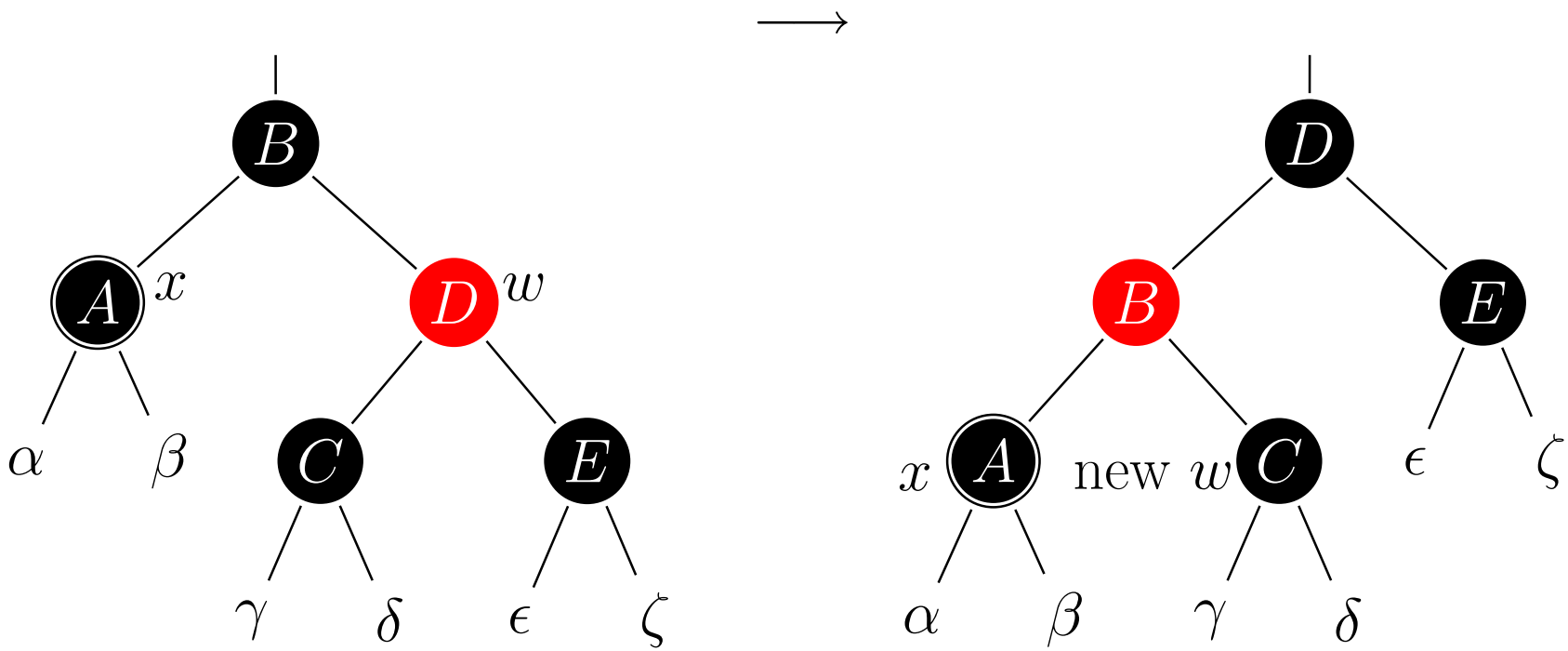


Figura: **viene trasformato in uno dei casi precedenti colorando D (i.e. w) di rosso, B (i.e. $p[x]$) di nero e ruotando il padre di x a sinistra**

Analisi

- RB-DELETE-FIXUP(T, x) richiede un tempo $O(\log_2 n)$
- Di conseguenza, anche RB-DELETE(T, x) richiede un tempo $O(\log_2 n)$

Cancellazione: un esempio

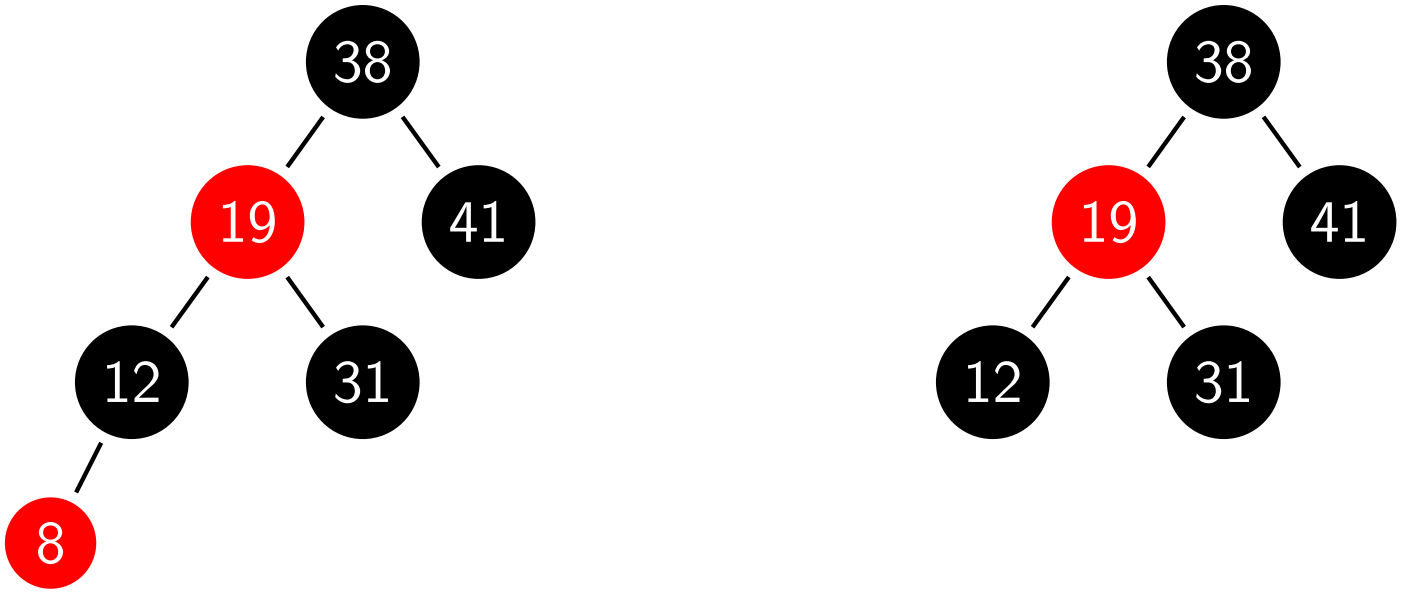


Figura: **cancellazione di 8**

Cancellazione: un esempio

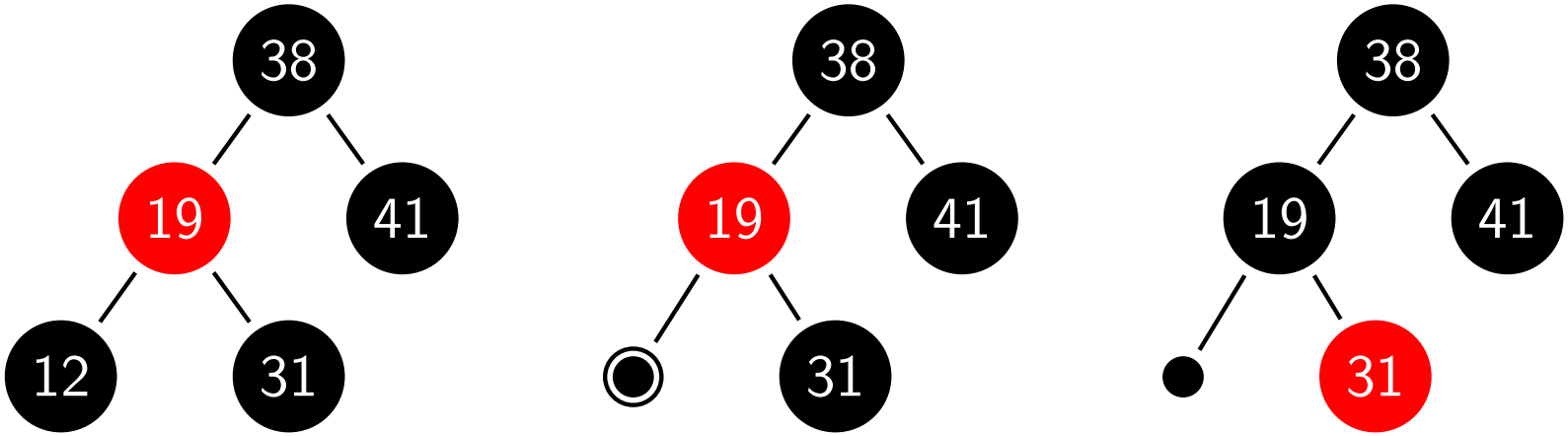


Figura: **cancellazione di 12**

Cancellazione: un esempio

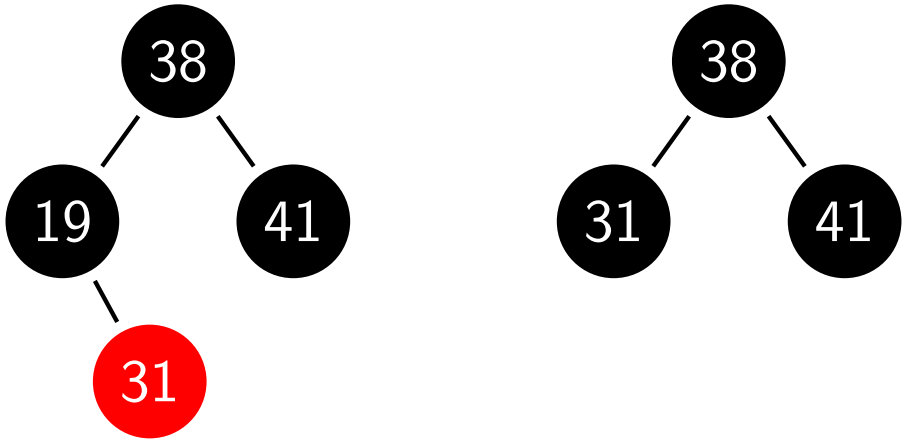


Figura: **cancellazione di 19**

Cancellazione: un esempio

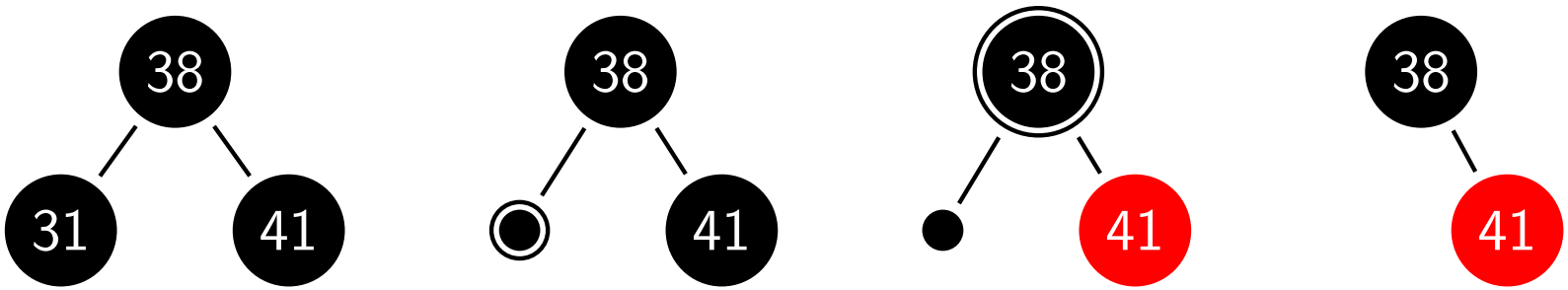


Figura: **cancellazione di 31**

Figura: **cancellazione di 38**