Algoritmi e Strutture Dati

Alberi Binari di Ricerca (BST)

Maria Rita Di Berardini, Emanuela Merelli[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Camerino

Alberi Binari di Ricerca (Binary Search Trees – BST)

Un albero binario di ricerca è un particolare tipo di albero binario

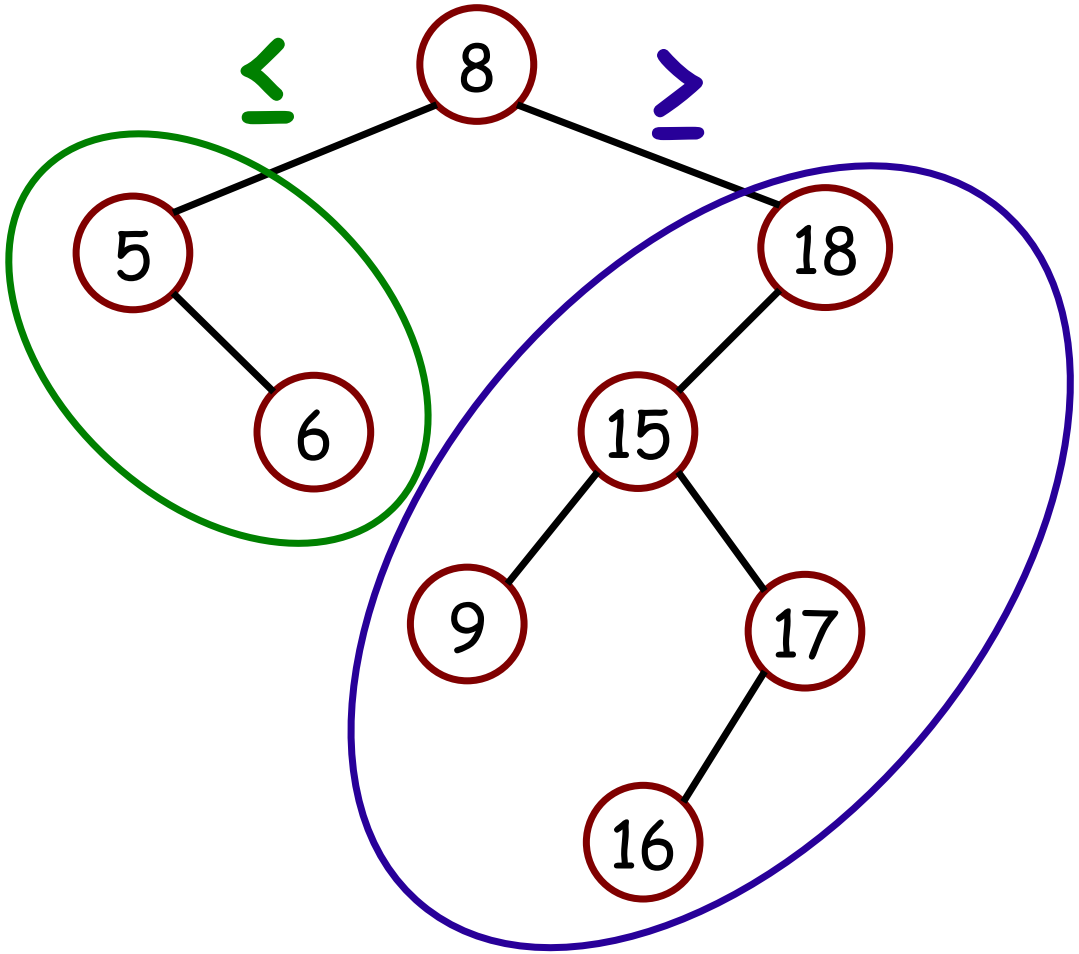
Ogni nodo u è un oggetto costituito da diversi campi: *key* (più eventuali dati satellite) un campo *left*, *right* e *parent* che puntano rispettivamente al figlio sinistro, al figlio destro e al padre u

Le chiavi sono sempre memorizzate in modo che sia verificata la **proprietà dell'albero binario di ricerca**:

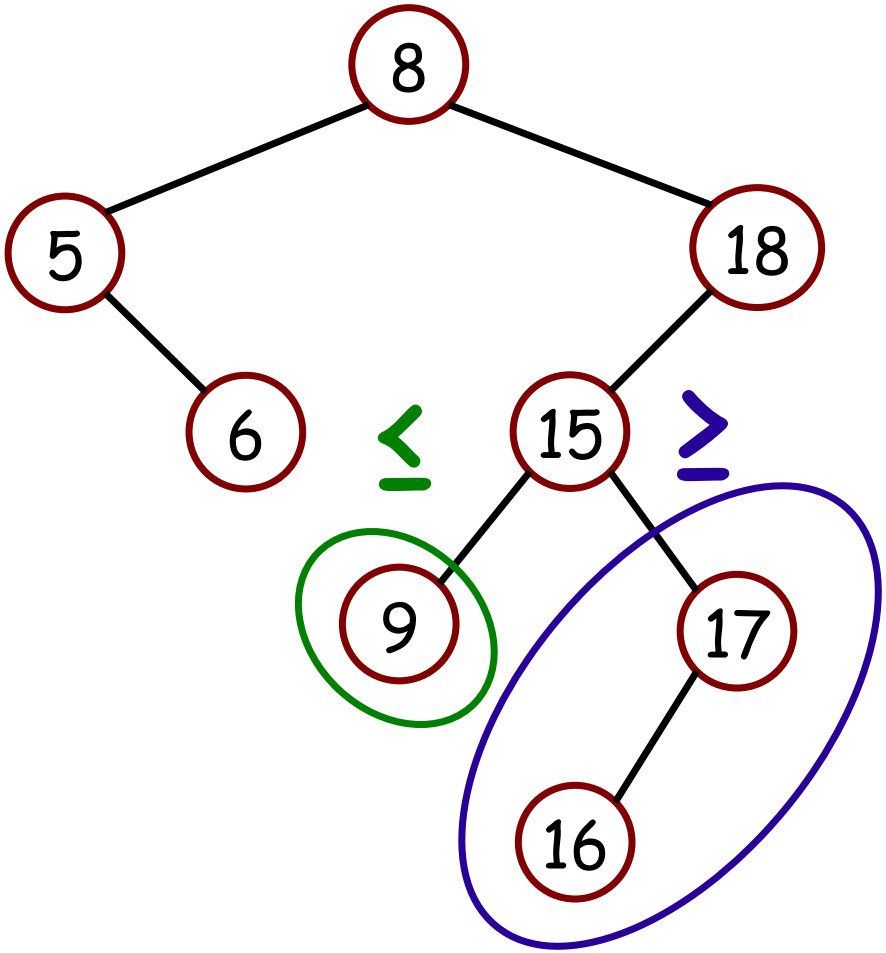
Sia x un nodo di un albero binario di ricerca; allora:

- *se y è un nodo del sottoalbero sinistro di x allora $key[y] \leq key[x]$*
- *se y è un nodo del sottoalbero destro di x allora $key[y] \geq key[x]$*

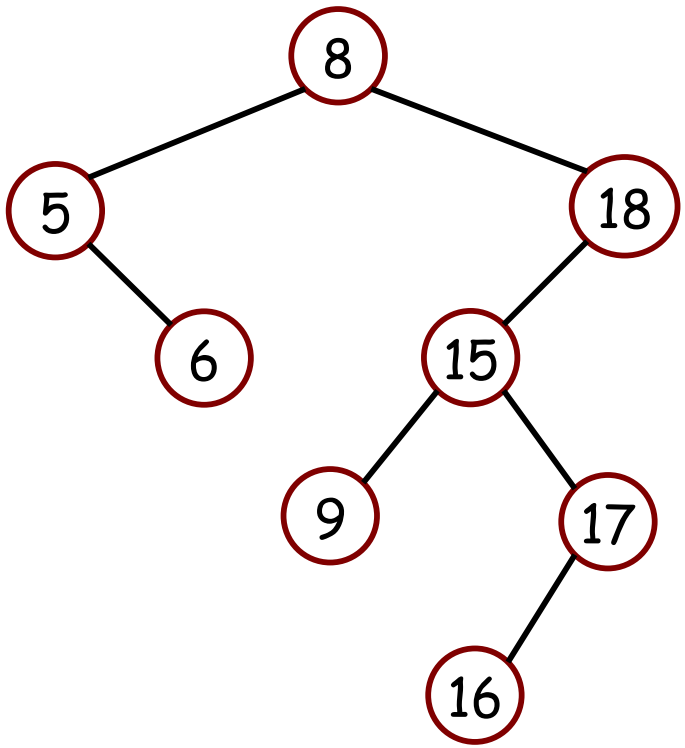
Alberi Binari di Ricerca



Alberi Binari di Ricerca



Alberi Binari di Ricerca e visita in ordine simmetrico



Inorder-Tree-Walk(x)
  if $x \neq \text{NIL}$
  then
    Inorder-Tree-Walk$(left[x])$
    stampa $key[x]$
    Inorder-Tree-Walk$(right[x])$

Inorder-Tree-Walk$(root)$

$5, 6, 8, 9, 15, 16, 17, 18$
elenca tutte le chiavi di un BST in modo ordinato

Esercizio

Dimostrare che, se x è la radice di un sottoalbero di n nodi la chiamata **Inorder-Tree-Walk**(x) richiede un tempo $\Theta(n)$

Sia $T(n)$ il tempo richiesto dalla chiamata **Inorder-Tree-Walk**(x) quando x è la radice di un (sotto)albero di n nodi

Se $n = 0$ (cioè se $x = \text{NIL}$) $T(n) = c$ per qualche costante $c > 0$

Se $n > 0$ e k è il numero di nodi del sottoalbero sinistro, allora $T(n) = T(k) + T(n - k - 1) + d$ per qualche costante $d > 0$

Applichiamo il metodo della sostituzione per dimostrare che $T(n) = (c + d)n + c$ per ogni $n \geq 0$ e quindi che $T(n) = \Theta(n)$

Esercizio

Applichiamo il metodo della sostituzione per dimostrare che $T(n) = (c+d)n + c$ per ogni $n \geq 0$ e quindi che $T(n) = \Theta(n)$

Procediamo per induzione su n

Caso Base ($n = 0$): $T(n) = c = (c+d)0 + c$

Per $n > 0$ abbiamo che

$$\begin{aligned} T(n) &= T(k) + T(n-k-1) + d \\ &= ((c+d)k + c) + ((c+d)(n-k-1) + c) + d \\ &= (c+d)k + c + (c+d)(n-k) - (c+d) + c + d \\ &= (c+d)n + c \end{aligned}$$

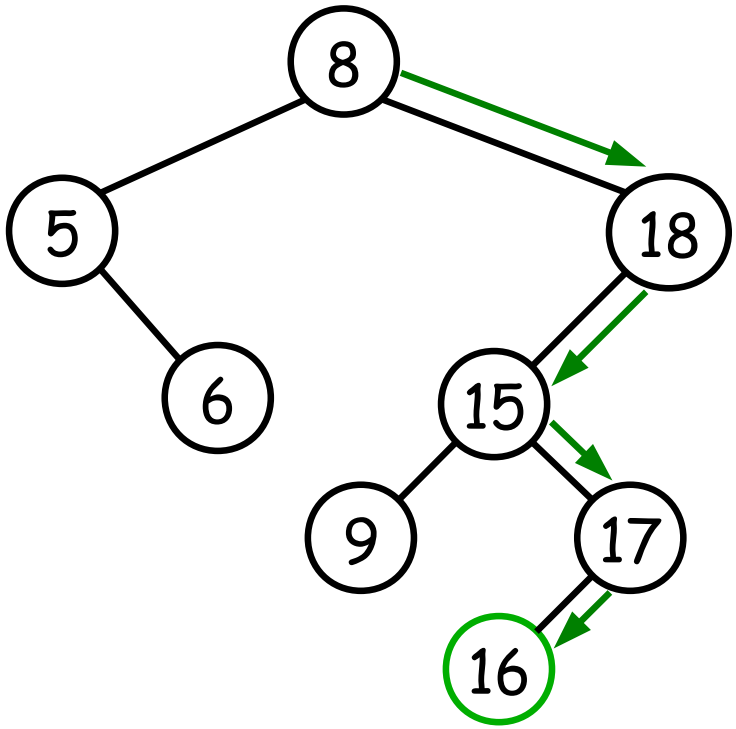
Operazioni su Alberi Binari di Ricerca

I BST sono strutture dati sulle quali vengono realizzate molte delle operazioni definite su insiemi dinamici, tra le quali:

Search, **Insert**, **Delete**, **Minumun**, **Maximum**, **Predecessor** e **Successor**

Ricerca di un elemento

Su ogni nodo, usiamo la proprietà dell'albero binario di ricerca per decidere se proseguire a destra o a sinistra



Cerchiamo 16

Il numero di confronti necessari per individuare un elemento in un albero binario di ricerca è pari, al più, all'altezza dell'albero

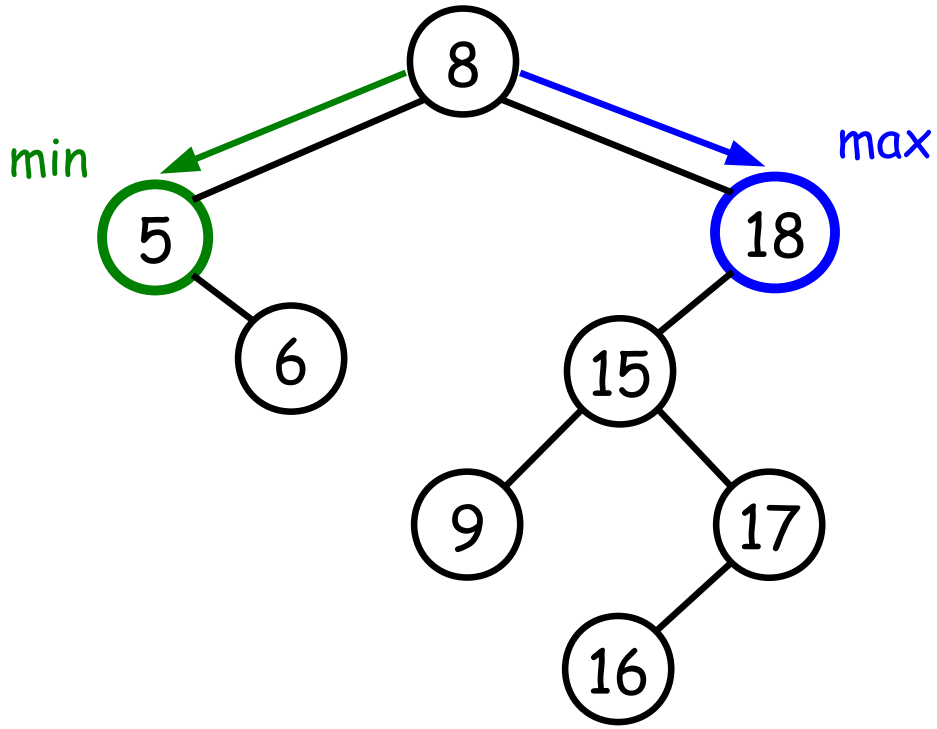
Ricerca di un elemento

Tree-Search(x, k)
  if $x = \text{NIL}$ or $k = key[x]$
    then return x
  if $k < key[x]$
    then return **Tree-Search**$(left[x], k)$
    else return **Tree-Search**$(right[x], k)$

Iterative-Tree-Search(x, k)
  while $x \neq \text{NIL}$ and $k \neq key[x]$
    do if $k < key[x]$
      then $x \leftarrow left[x]$
      else $x \leftarrow right[x]$
  return x

Minimo e massimo

Seguiamo i puntatori *left* (per **Tree-Minumum**) e *right* (per **Tree-Maximum**) dalla radice fin quando non si incontra NIL



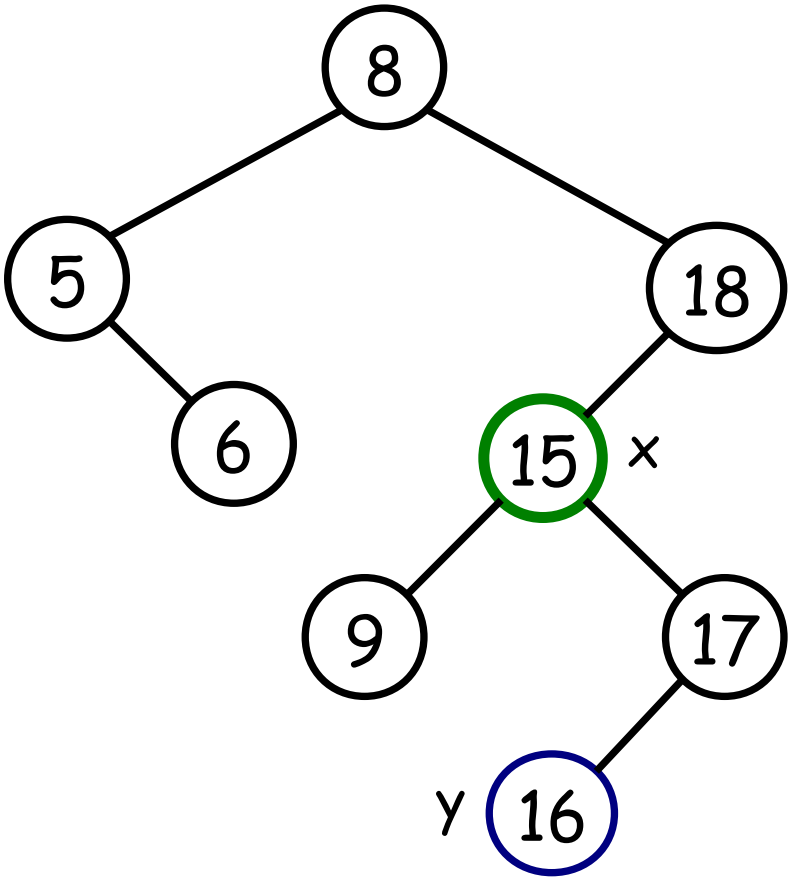
Minimo e massimo

Tree-Minimum(x)
  while $left[x] \neq \text{NIL}$
    do $x \leftarrow left[x]$
  return x

Tree-Maximum(x)
  while $right[x] \neq \text{NIL}$
    do $x \leftarrow right[x]$
  return x

Successore e Predecessore

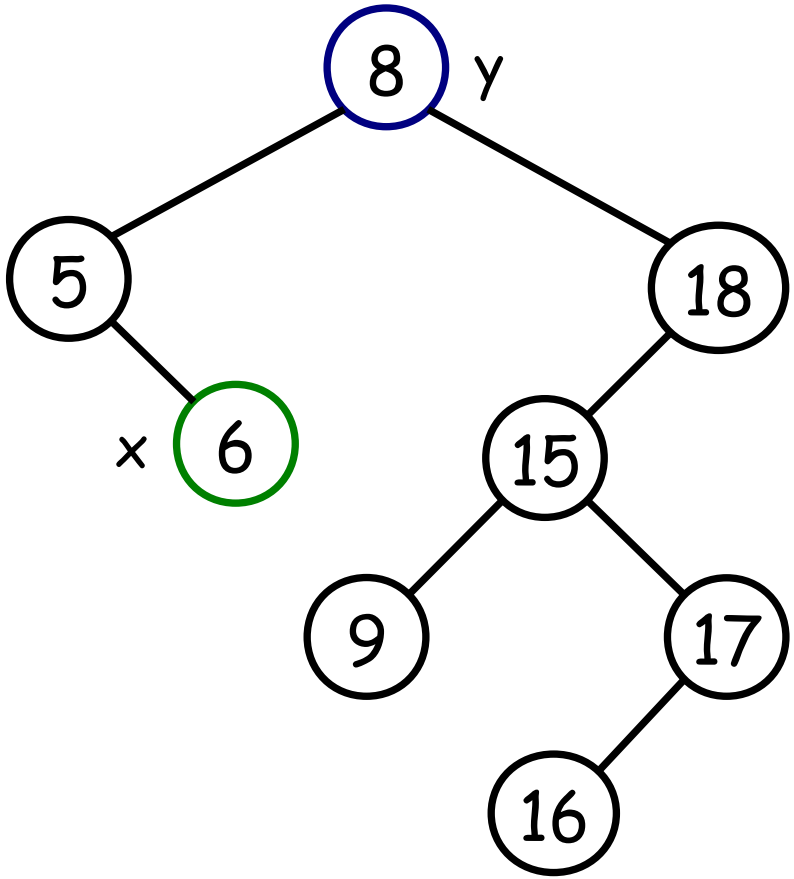
Successore - caso 1: x ha un sottoalbero destro



y = Successor(x) =
Tree-Minimum(right[x]) = y

Successore e Predecessore

Successore - caso 2: x non ha un sottoalbero destro, ma ha un successore y



y =Successor(x) è l'antenato più prossimo di x il cui figlio sinistro è anch'esso un antenato di x

Successore e Predecessore

- Quale è il successore di x se questo non ha un figlio destro?
- Non possiamo scendere a sinistra perchè le chiavi contenute nel sottoalbero sinistro sono tutte più piccole di $key[x]$
- Possiamo solo provare a risalire l'albero di padre in padre
- Sia $y = p[x]$ (il padre di x) e assumiamo che x sia il figlio destro di y (cioè che $x = right[y]$). In questo caso $key[y]$ è minore o uguale a $key[x]$ e quindi y non è il successore che stiamo cercando
- Dobbiamo risalire ancora di un livello esaminando il padre di y
- Continuiamo a salire di livello finchè non individuiamo un nodo il cui figlio sinistro è un antenato di x, questo nodo contiiene la prima chiave più grande di $key[x]$

Successore e Predecessore

Tree-Successor(x)
  if $right[x] \neq \text{NIL}$
    then return **Tree-Minumum**$(right[x])$

  $y \leftarrow p[x]$
  while $y \neq \text{NIL}$ and $x = right[y]$
    do
      $x \leftarrow y$
      $y \leftarrow p[y]$
  return y

Successore e Predecessore

L'algoritmo per il calcolo del predecessore di un dato nodo è del tutto simmetrico

Seguiamo il puntatore p dal nodo x fino, al più, alla radice

Di nuovo, il costo di entrambe le operazioni è proporzionale all'altezza dell'albero

Ricapitolando

Abbiamo dimostrato il seguente teorema

Teorema: le operazioni su insiemi dinamici Search, Minumun, Maximum, Predecessor e Successor possono essere eseguite su un albero binario di ricerca di altezza h in in tempo $O(h)$

Inserimento

L'algoritmo **Tree-Insert**(T, z) lavora in maniera molto simile alla ricerca

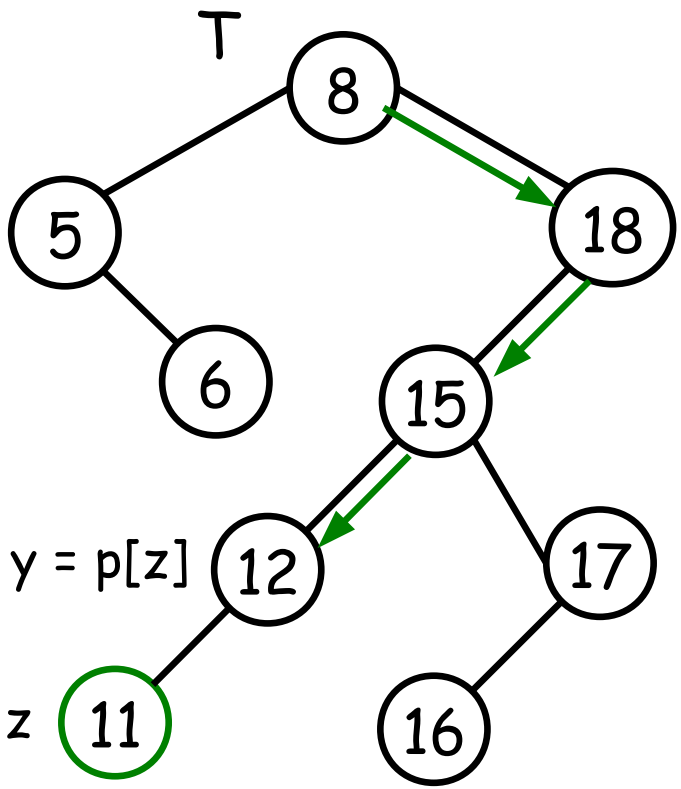
Cerca la corretta posizione di z nell'albero identificando così il nodo y che diventerà padre di z

Infine, appende z come figlio sinistro/destro di y in modo che sia mantenuta la proprietà dell'albero binario di ricerca

Come la altre primitive su alberi binari di ricerca, la procedura **Tree-Insert** richiede un tempo $O(h)$

Inserimento

Tree-Insert(T, z) con key[z] = 11



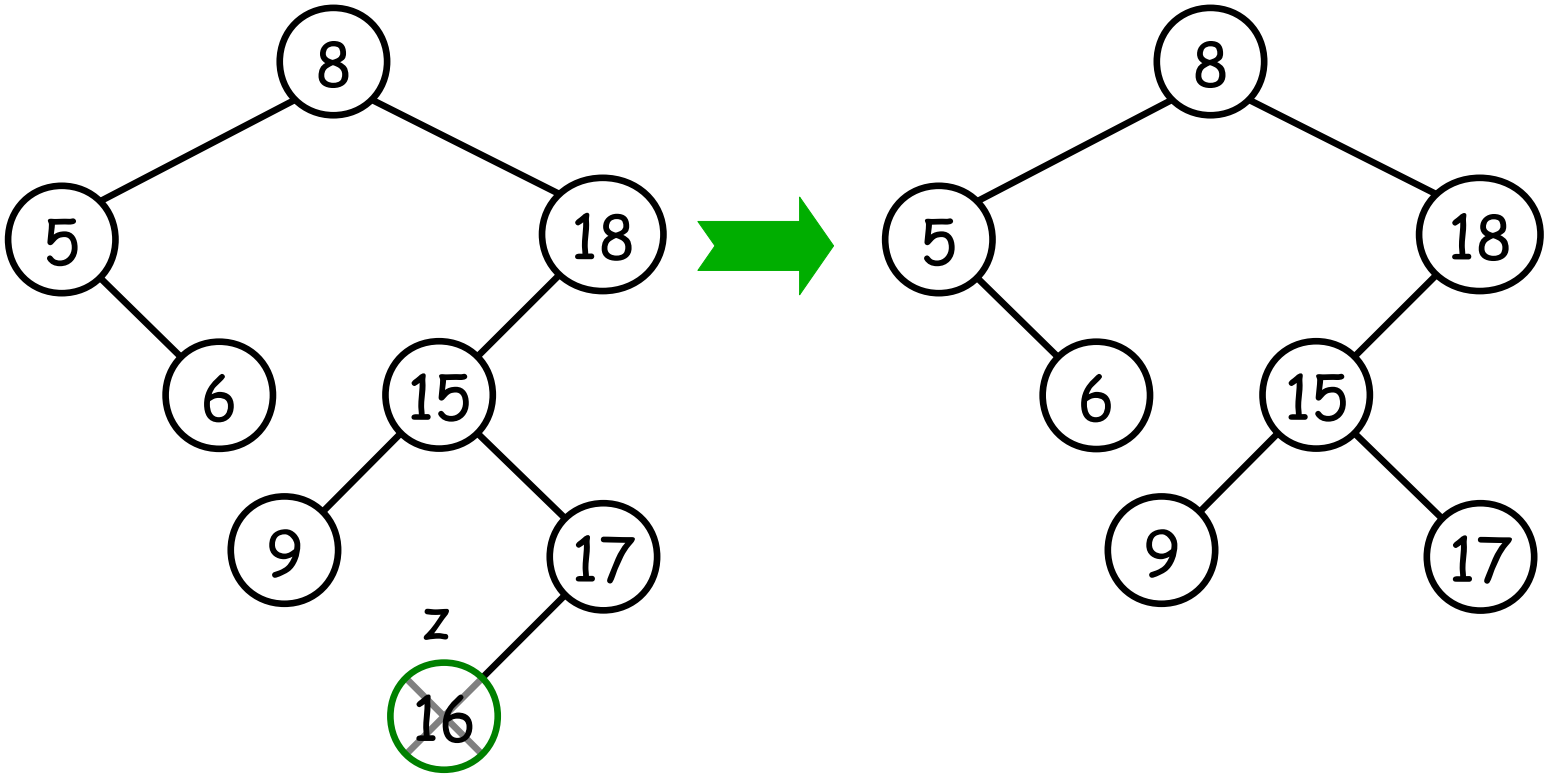
Tree-Insert(T, z)

$y \leftarrow \text{NIL}$ ▷ cerca un cammino discendente dalla radice fino ad una
$x \leftarrow root[T]$ ▷ foglia; x segue il cammino, y punta al padre di x
while $x \neq \text{NIL}$
do $y \leftarrow x$
if $key[z] < key[x]$
then $x \leftarrow left[x]$
else $x \leftarrow right[x]$

▷ usciti da questo ciclo y è il puntatore al padre del nuovo nodo
$p[z] \leftarrow y$
if $y = \text{NIL}$
then $root[T] \leftarrow z$
else if $key[z] < key[y]$
then $left[y] \leftarrow z$
else $righ[y] \leftarrow z$

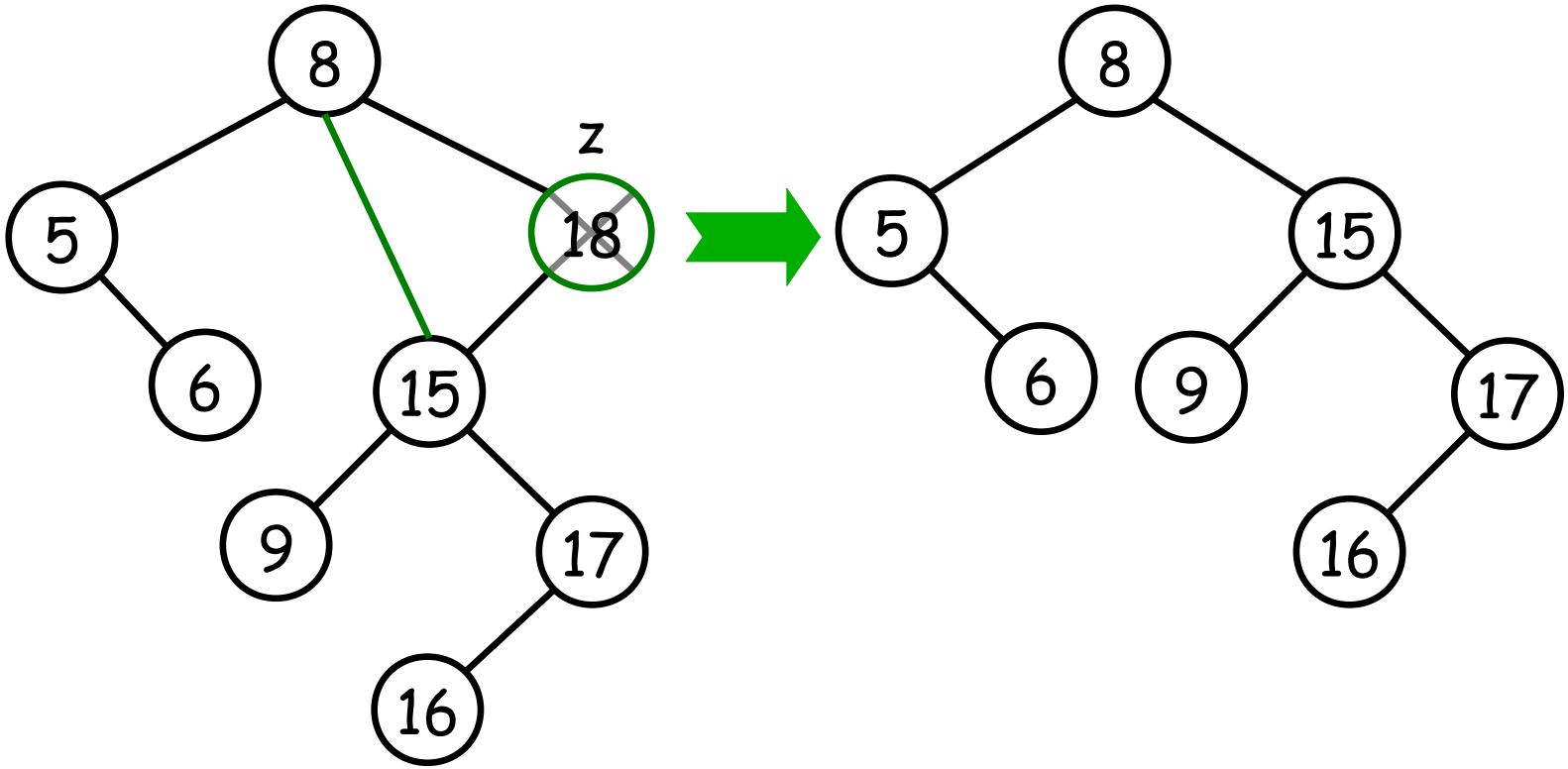
Cancellazione

Tree-Delete(T,z) quando il nodo z è una foglia



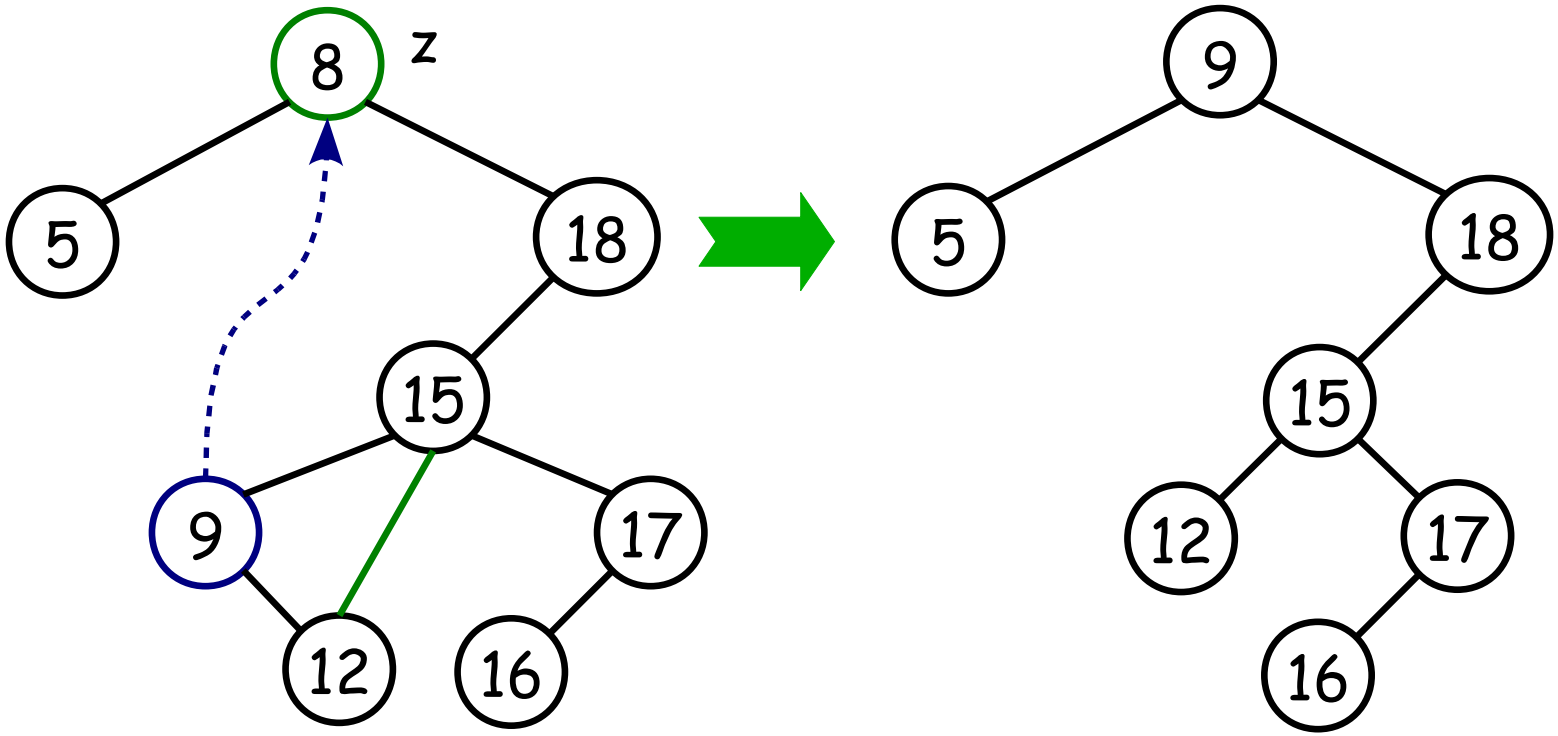
Cancellazione

Tree-Delete(T,z) quando z ha esattamente un figlio



Cancellazione

Tree-Delete(T,z) quando z ha due figli



La chiave di z viene sostituita con quella di y = Tree-Successor(T, z) ed eliminiamo il nodo y (è il nodo più a sinistra del sottoalbero destro di z ed ha al più un figlio, quello destro)

Tree-Delete(T, z)

if $left[z] = \text{NIL}$ or $right[z] = \text{NIL}$ ▷ z ha al più un figlio
  then $y \leftarrow z$
  else $y \leftarrow$ **Tree-Successor**(z) ▷ y è il nodo da eliminare
if $left[y] \neq \text{NIL}$
  then $x \leftarrow left[y]$
  else $x \leftarrow right[y]$
  ▷ x è il figlio non NIL di y (se esiste) altrimenti è NIL
if $x \neq \text{NIL}$ **then** $p[x] \leftarrow p[y]$
if $p[y] = \text{NIL}$
  then $root[T] \leftarrow x$
  else if $left[p[y]] = y$
    then $left[p[y]] \leftarrow x$
    else $right[p[y]] \leftarrow x$
if $y \neq z$ ▷ se il nodo eliminato è il successore di z
  then $key[z] \leftarrow key[y]$ ▷ più altri dati satellite
return y

Ricapitolando

Abbiamo dimostrato il seguente teorema

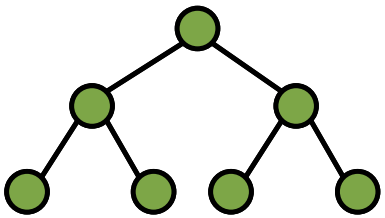
Teorema: le operazioni su insiemi dinamici Insert e Delete possono essere eseguite su un albero binario di ricerca di altezza h in in tempo $O(h)$

Costo delle Operazioni

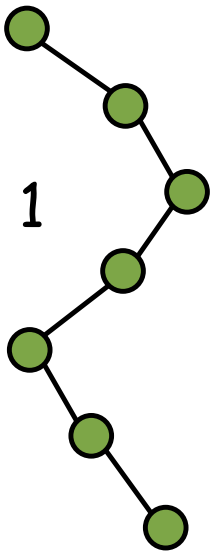
Tutte le operazioni su BST hanno un costo $O(h)$ dove h è l'altezza dell'albero binario di ricerca

È fondamentale mantenere l'albero bilanciato, in questo caso infatti l'altezza è logaritmica nel numero di nodi

$h = \log_2 (n + 1) - 1$



$h = n - 1$



Costo delle Operazioni

Quando l'albero è sbilanciato $h = n - 1$ e le operazioni hanno un costo lineare invece che logaritmico

Soluzione:

- introduciamo alcune proprietè addizionali sui BST per mantenerli bilanciati (Alberi AVL, Alberi Rosso-Neri)
- le operazioni dinamiche sull'albero devono preservare le proprietà introdotte per mantenere il bilanciamento
- paghiamo in termini di una maggiore complessità di tali operazioni