Algoritmi e Strutture Dati

Tabelle Hash

Maria Rita Di Berardini, Emanuela Merelli[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Camerino

Tabelle Hash

Una **tabella hash** è una struttura dati efficiente per implementare il TDA dizionario (insieme dinamico che supporta le operazioni di inserimento, cancellazione e ricerca)

Sotto ragionevoli assunzioni, queste tabelle implementano queste operazioni con una complessità $\Theta(1)$ nel **caso medio**

Nel caso medio, la ricerca su tabelle hash è più efficiente di una ricerca sequeziale (complessità $\Theta(n)$) e di quella su alberi binari di ricerca "bilanciati" (complessità $\Theta(\log n)$)

Il tipo Dizionario

Dati: un insieme di coppie $(key, elem)$

Operazioni:

`insert`*(elem e, key k)*
aggiunge ad S una nuova coppia (e, k)

`delete`*(elem e, key k)*
cancella da S la coppia con chaive k

`search`*(key k)*
se la chiave k è presente in S restituisce l'elemento e ad esso associato altrimenti restituisce `null`

Tabelle Hash

Una tabella è un'insieme di elementi E_i

Ogni elemento E_i è caratterizzato da:

- una chiave univoca K_i
- l'informazione I_i associata alla chiave

Scopo della tabella è quello di memorizzare e rintracciare le informazioni I_i

Ricerca su tabelle

L'operazione fondamentale che si esegue su una tabella è la ricerca di un elemento nota la chiave

Per ogni elemento E_i, definiamo la lunghezza di ricerca di E_i come il numero di prove necessarie per raggiungere E_i, i.e. il numero di chiavi che bisogna leggere prima di rintracciare K_i

La lunghezza media di ricerca S è la media delle S_i per tutti gli elementi della tabella

Come implementiamo una tabella

Esistono due possibili metodologie di implementazione

1. Tabelle ad indirizzamento diretto
2. Tabelle Hash

Parte I

Tabelle ad indirizzamento diretto

Tabelle ad indirizzamento diretto

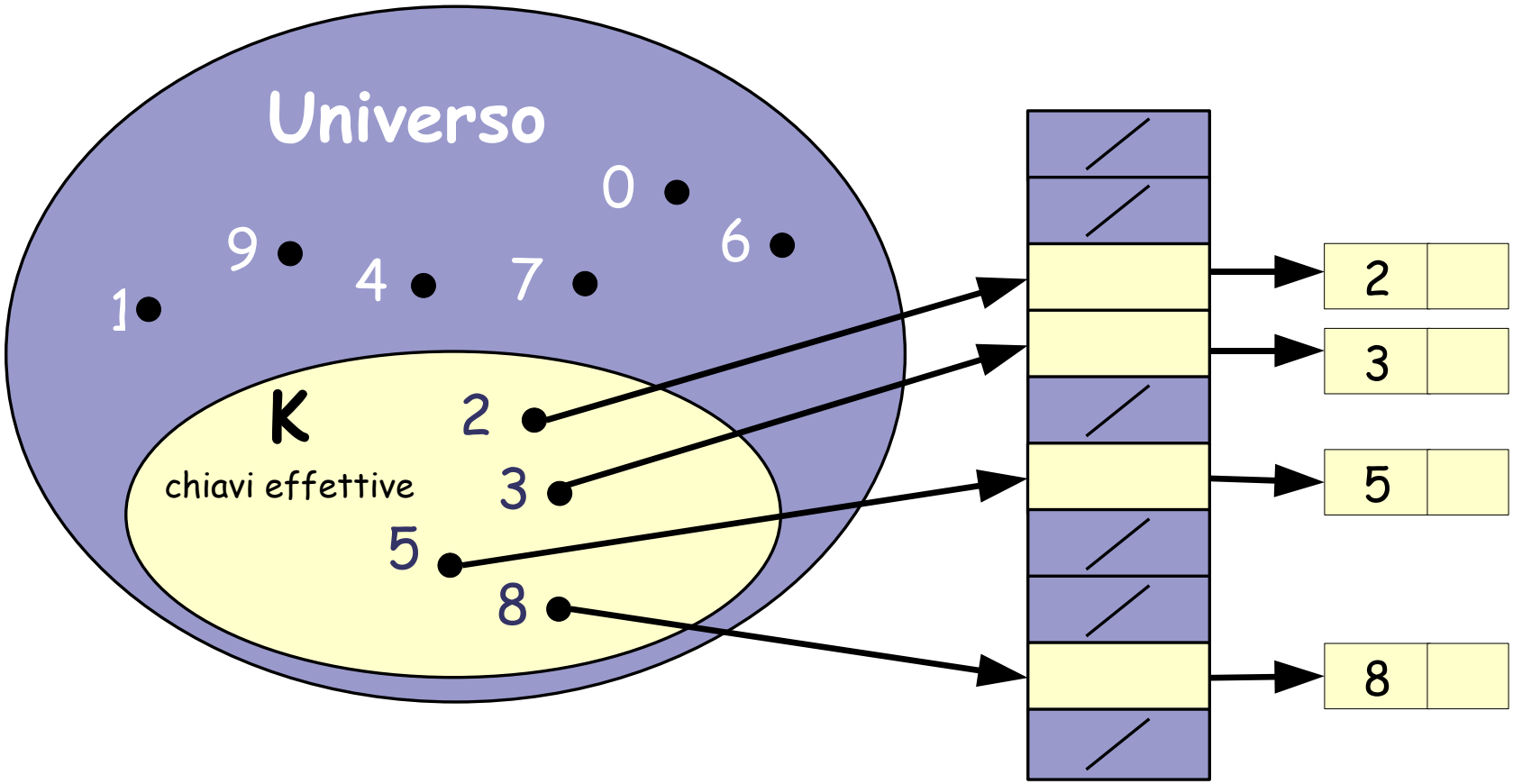
L'**indirizzamento diretto** è una tecnica semplice che funziona bene quando l'universo U delle chiavi è ragionevolmente piccolo

Supponente di dover gestire un insieme dinamico le cui chiavi varino nell'insieme $U = \{0, \ldots, m-1\}$ (insieme universo)

Rappresentiamo l'insieme dinamico utilizzando un array, o **tabella**, $T[0, \ldots, m-1]$, in cui ogni posizione (slot) corrisponde ad una chiave dell'universo U ($m = |U|$)

Abbiamo una corrispondenza **biunivoca** tra chiavi e posizioni della tabella: l'elemento con chiave k viene memorizzato nella cella di indice k

Tabelle ad indirizzamento diretto



Implementazione delle operazioni

Le operazioni di ricerca, inserimento e cancellazione sono facili da implementare ed hanno un costo computazionale costante $\Theta(1)$

Direct-Address-Search(T, k)
    return $T[k]$

Direct-Address-Insert(T, x)
    $T[key[x]] \leftarrow x$

Direct-Address-Delete(T, x)
    $T[key[x]] \leftarrow \text{NIL}$

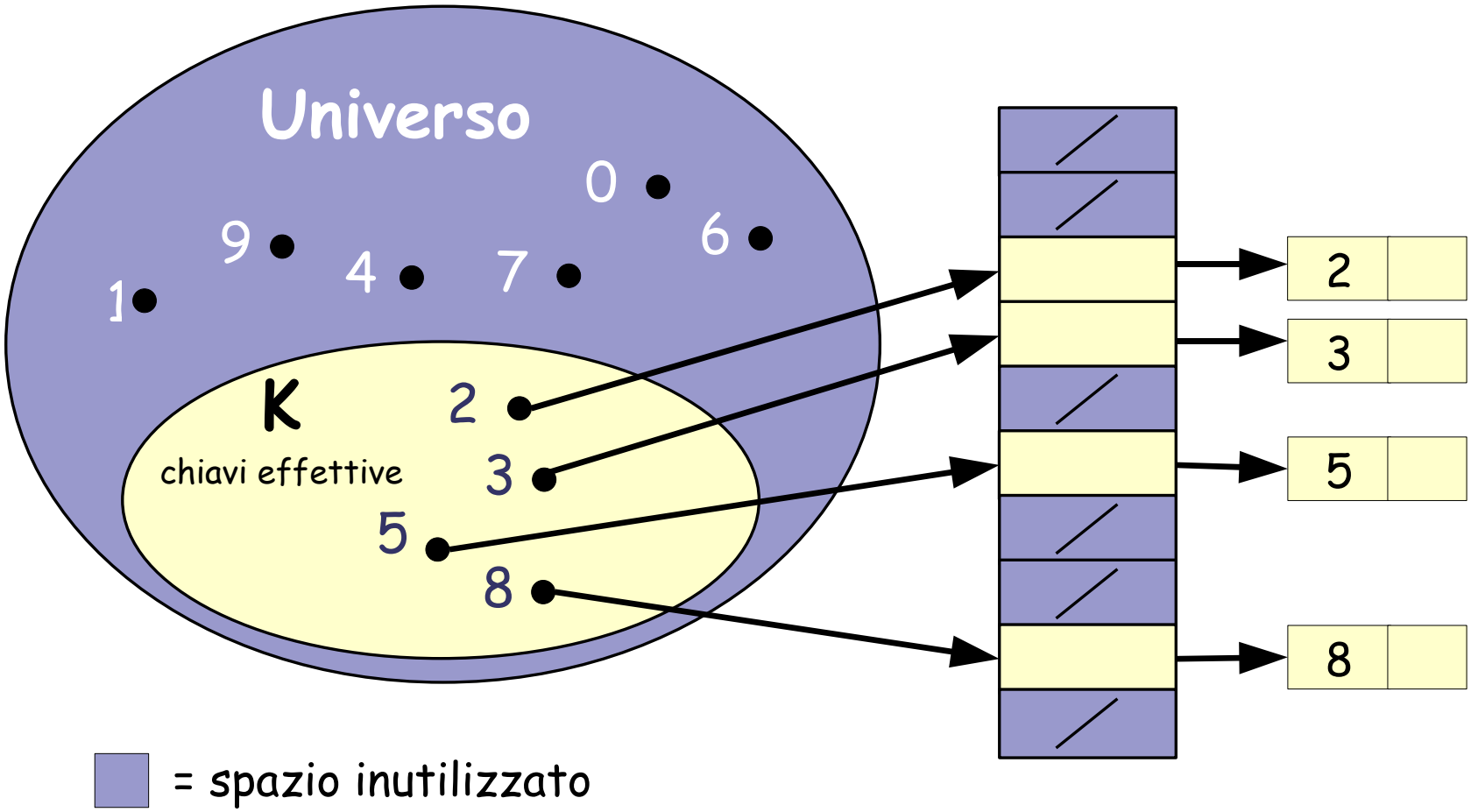
Tabelle ad indirizzamento diretto: un esempio

- Supponente di dover gestire un insieme di elementi le cui chiavi siano parole di tre lettere dell'alfabeto inglese (26 lettere)
- Possiamo convertire le chiavi alfabetiche in chiavi numeriche corrispondenti al numero d'ordine lessicografico
  - $MAS = 12 \cdot 26^2 + 0 \cdot 26 + 18 \cdot 26^0 = 8.130$
  - $SAM = 18 \cdot 26^2 + 0 \cdot 26 + 12 \cdot 26^0 = 12.180$
- Numero di chiavi possibili: $26^3 = 17.576$
- Abbiamo bisogno di una tabella $T[0, ..., 17575] \simeq 17KB$ di memoria

Tabelle ad indirizzamento diretto: inconvenienti

- La dimensione della tabella è data da $m = |U|$
- Se U (e quindi m) è molto grande, implementare questa tabella può essere impraticabile, se non addirittura impossibile
- Lo spazio allocato è indipendente dal numero di elementi effettivamente memorizzati (le chiavi effettive)
- Se l'insieme K delle chiavi effettive è piccolo rispetto ad U, la maggior parte dello spazio allocato per la tabella T sarebbe inutilizzato

Inconvenienti



Fattore di carico

Misuriamo il grado di riempimento di una tabella introducendo il fattore di carico:

$$\alpha = \frac{n}{m}$$

dove $m = |U|$ (dimensione della tabella) e $n = |K|$ (numero di chiavi effettivamente utilizzate)

Esempio: tabella con nomi di studenti indicizzati da numeri di matricola a 6 cifre

$$n = 100, m = 10^6, \alpha = 0,0001 = 0,01\%$$

Grande spreco di memoria!

Una possibile soluzione ...

Se usiamo liste collegate, possiamo ridurre l'occupazione di spazio da $\Theta(|U|)$ a $\Theta(|K|)$

Problema (non finiscono mai): Inserimento, Cancellazione e Ricerca costano $\Theta(|K|)$ invece di $\Theta(1)$

Un compromesso tra tempo e spazio

L'uso di tabelle (o tavole) hash consente di ottenere un buon compromesso tra tempo e memoria

Memoria richiesta: $\Theta(|K|)$

Tempo di ricerca: $\Theta(1)$, ma nel caso **medio** e non in quello pessimo

Parte II

Tabelle Hash

Tabelle Hash

Dimensionare la tabella in base al numero di elementi **attesi** ed utilizzare una funzione hash per indicizzare la tabella

Una funzione hash è una funzione che, data una chiave $k \in U$, restituisce la posizione $h(k)$ della tabella in cui l'elemento con chiave k viene memorizzato

$$h : U \longrightarrow [0, ..., m-1]$$

N.B: la dimensione m della tabella può non coincidere con la $|U|$, anzi in generale $m \ll |U|$ (m è molto minore di $|U|$)

Tabelle Hash

L'idea è quella di definire una funzione d'accesso che permetta di ottenere la posizione di un elemento in data la sua chiave

Con l'hashing, un elemento con chiave k viene memorizzato nella cella $h(k)$

Pro: riduciamo lo spazio necessario per memorizzare la tabella

Contro:

- perdiamo la corrispondenza tra chiavi e posizioni in tabella
- le tabelle hash possono soffrire del fenomeno delle **collisioni**

Collisioni

Due chiavi distinte k_1 e k_2 **collidono** quando corrispondono alla stessa posizione della tabella, ossia quando $h(k_1) = h(k_2)$

Soluzione ideale: eliminare del tutto le collisioni scegliendo un'opportuna (= perfetta) funzione hash. Una funzione hash si dice **perfetta** se è iniettiva, cioè se per ogni $k_1, k_2 \in U$

$$k_1 \neq k_2 \Longrightarrow h(k_1) \neq h(k_2)$$

Deve essere $|U| \leq m$

Se $|U| \gg m$, evitare del tutto le collisioni è impossibile (Ad es. supponente di dover inserire un nuovo elemento in una tabella piena)

Risoluzione delle collisioni

Una possibile alternativa: utilizzare una "buona" funzione hash (per minimizzare le collisioni) e prevedere nel contempo dei metodi di risoluzione delle collisioni

Metodi classici di risoluzione delle collisioni:

1. Liste di collisione: gli elementi collidenti sono contenuti in liste esterne alla tabella; $T[i]$ punta alla lista di elementi tali che $h(k) = i$

2. Indirizzamento aperto: tutti gli elementi sono contenuti nella tabella; se una cella è occupata, se ne cerca un'altra libera

Una buona funzione hash

Una buona funzione hash è una funzione che distribuisce le chiavi in modo uniforme sulle varie posizioni della tabella e quindi minimizza le collisioni quando possibile

hash[1] pl -es n

1. rifrittura, carne rifritta con cipolla, patate o altri vegetali
   hash browns (spec US) pasticcio fritto di patate lesse passate con cipolla
2. fiasco, pasticcio, guazzabuglio
   to make a hash of st (coll) pasticciare qs, far male qs, fare fiasco in qs
3. (fig) rifrittume
4. (spec radio) segnali parassiti
5. nella loc slang to settle sbs hash mettere in riga qn, zittire o sottomettere qn, sistemare o mettere a posto qn una volta per tutte
6. anche hash sign (tipog) il simbolo tipografico.

Una buona funzione hash

Una buona funzione hash deve:

1. essere facile da calcolare (tempo costante)
2. soddisfare il requisito di **uniformità semplice**, i.e. deve distribuire le chiavi in maniera uniforme su tutta la tabella

In maniera più formale

Una funzione hash soddisfa il requisito di uniformità semplice se ogni chiave ha la stessa probabilità di vedersi assegnato uno qualsiasi degli m possibili slot, indipendentemente dagli altri slot già assegnati

Sia $P(k)$ la probabilità che venga estratta una chiave k tale che $h(k) = j$; h soddisfa l'uniformità semplice se

$$P(j) = \sum_{k\,:\,h(k)=j} P(k) = \frac{1}{m} \quad \text{per ogni } j = 0, \ldots, m-1$$

$P(j) = \sum_{k:h(k)=j} P(k)$ è la probabilità che l'elemento con chiave k venga memorizzato nella posizione j

Il requisito di uniformità semplice

- $h(k) = k \mod 2$ non è una buona funzione hash
  - $P(0) = P(1) = 1/2$, ma $P(j) = 0$ se $j \geq 2$
- il valore $h(k)$ dipende solo in maniera parziale dal valore di k (solo l'ultimo bit della rappresentazione binaria di k)
- per lo stesso motivo, $h(k) = k \mod 3$ o $h(k) = k \mod 4$ non sono delle buone funzioni hash
- Intuitivamente, una funzione hash è buona se per chiavi simili vengono restituiti dei valori diversi
- In questo senso, una funzione che sembra comportarsi bene è $h(k) = k \mod 127$

$h(22) = 22$, $h(122) = 122$, $h(222) = 95$, $h(322) = 68$, $h(422) = 41$, $h(522) = 14$, $h(1322) = 52$, $h(1422) = 25$, $h(1522) = 125$, ...

Una buona funzione hash

Il requisito di uniformità semplice è difficile da verificare perchè raramente è nota la funzione di distribuzione di probabilità con cui vengono estratte le chiave (la funzione di probabilità P)

Nella pratica però è possibile usare delle euristiche (metodo di approssimazione) per realizzare delle funzioni hash con buone prestazioni:

1. Metodo della divisione
2. Metodo della moltiplicazione

Metodo della divisione

Consiste nell'associare alla chiave k il valore $h(k) = k \bmod m$

Semplice e veloce, ma occorre evitare certi valori di m; ad esempio, m non dovrebbe essere una potenza di 2

Se $m = 2^p$, $h(k)$ rappresenta solo i p bit meno significativi di k. Questo limita la casualità di h, in quanto è funzione di una porzione (di dimensione logaritmica) della chiave

Bisogna rendere la funzione h dipendente da tutti i bit della chiave

Una buona scelta per m è un numero primo non troppo vicino ad una potenza di due

Metodo della moltiplicazione

Si svolge in due passi:

- moltiplichiamo la chiave k per una costante $0 < A < 1$ ed estraimo la parte frazionaria $= kA - \lfloor kA \rfloor$
- moltiplichiamo il valore ottenuto per m e prendiamo la parte intera inferiore del risultato $= \lfloor m \cdot (kA - \lfloor kA \rfloor) \rfloor$

Ad esempio, se $m = 90$, $k = 19$ e $A = 1/4$

- $kA = 4,75$, $\lfloor kA \rfloor = 4$ e $kA - \lfloor kA \rfloor = 0,75$
- $m \cdot (kA - \lfloor kA \rfloor) = 90 \cdot 0,75 = 67,5$ e $\lfloor 67,5 \rfloor = 67$

Metodo della moltiplicazione

Ricapitolando, il metodo della moltiplicazione associa alla chiave k il valore hash

$$h(k) = \lfloor m \cdot (kA - \lfloor kA \rfloor) \rfloor$$

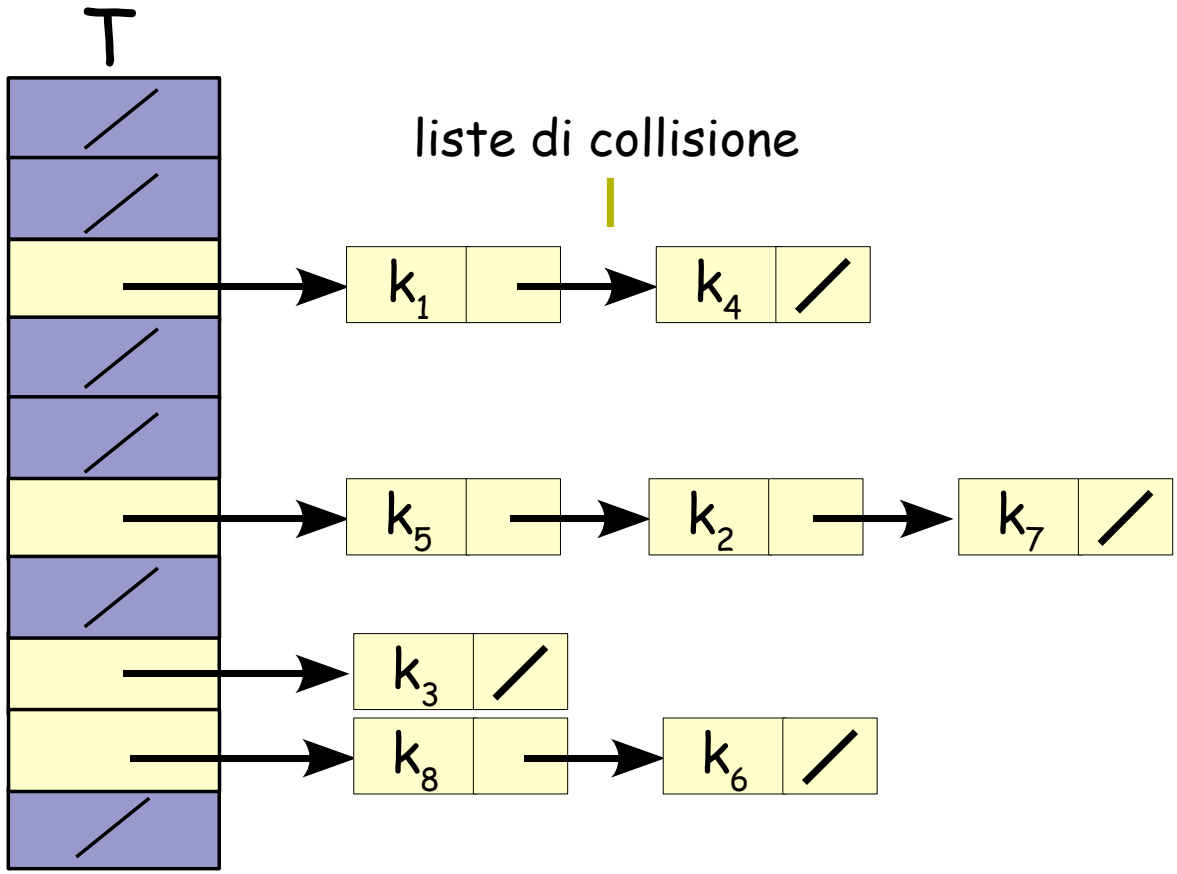
dove A è una costante nell'intervallo $0 < A < 1$

Ha il vantaggio che il valore di m non è critico; di solito si sceglie $m = 2^p$

Come scegliere A? Knuth suggerisce un valore $\backsimeq (\sqrt{5} - 1)/2$

Risoluzione delle collisioni per concatenazione (chaining)

Tutti gli elementi collidenti in una data posizione vengono inseriti nella stessa posizione della tabella in una lista concatenata



Implementazione delle operazioni

Chained-Hash-Search(T, k)
ricerca un elemento con chiave k nella lista $T[h(k)]$

Chained-Hash-Insert(T, x)
inserisci x in testa alla lista $T[h(key[x])]$

Chained-Hash-Delete(T, x)
cancella x dalla lista $T[h(key[x])]$

Analisi del costo delle operazioni

Chained-Hash-Search(T, k)

tempo di esecuzione proporzionale alla lunghezza della lista

Chained-Hash-Insert(T, x)

il tempo di esecuzione $O(1)$

Chained-Hash-Delete(T, x)

se si usano liste bidirezionali, può richiedere un tempo $O(1)$

con liste semplici, richiede lo stesso tempo della ricerca

Costo della ricerca: analisi nel caso peggiore

Data una tabella T con m posizioni ed n elementi, quanto tempo richiede la ricerca di un elemento data la sua chiave?

Caso peggiore:

- tutte le chiavi vengono inserite nella stessa posizione della tabella creando un'unica lista di collisione di lunghezza n
- il tempo di ricerca è $\Theta(n)$ (ossia il costo della ricerca nella lista di collisione) + il tempo di calcolo di h

Costo della ricerca: analisi del caso medio

Il **fattore di carico** α è il rapporto tra il numero n degli elementi e la dimensione m della tabella, i.e. $\alpha = \frac{n}{m}$

$\alpha < 1$ molte posizioni disponibili rispetto agli elementi memorizzati
$\alpha = 1$ numero di elementi memorizzati è uguale alla dimensione della tabella
$\alpha > 1$ situazione attesa: molti elementi memorizzati rispetto alla dimensione della tabella

Se h soddisfa l'ipotesi di uniformità semplice, il fattore di carico α è pari alla lunghezza media di ogni lista concatenata

Analisi nel caso medio

Il comportamento nel caso medio dipende da come la funzione hash distribuisce le chiavi sulle m posizioni della tabella

Ipotesi: uniformità semplice della funzione di hash

- $h(k)$ è calcolata in $O(1)$, e quindi
- il costo della ricerca di un elemento con chiave k dipende esclusivamente dalla lunghezza della lista $T[h(k)]$

Costo della ricerca: analisi del caso medio

Teorema (ricerca senza successo):
Nell'ipotesi di uniformità semplice della funzione hash, una ricerca senza successo in una tabella hash in cui le collisioni sono risolte mediante liste di collisione richiede in media un tempo $\Theta(1+\alpha)$

Proof:
Il costo del calcolo di $h(k)$ è $O(1)$.

Si deve, inoltre, scorrere tutta la lista $T[h(k)]$ la cui lunghezza media è α.

Il costo medio totale è $\Theta(1+\alpha)$

Costo della ricerca: analisi del caso medio

Teorema (ricerca con successo):
Nell'ipotesi di uniformità semplice della funzione hash, una ricerca con successo in una tabella hash in cui le collisioni sono risolte mediante liste di collisione richiede in media un tempo $\Theta(1+\alpha)$

Proof:
Il costo del calcolo di $h(k)$ è $O(1)$.

Si deve, inoltre, scorrere solo una porzione della lista $T[h(k)]$; possiamo assumere che la lunghezza media di tale porzione sia $\frac{\alpha}{a}$, dove a è una costante $0 < a \leq 1$.

Il costo medio totale è $\Theta(1+\frac{\alpha}{a}) = \Theta(1+\alpha)$

Costo della ricerca: analisi del caso medio

Teorema (ricerca):
Nell'ipotesi di uniformità semplice della funzione hash, una ricerca (con o senza) successo in una tabella hash in cui le collisioni sono risolte mediante liste di collisione richiede in media un tempo $\Theta(1+\alpha)$

Se n è proporzionale ad m, cioè se $n = O(m)$, allora

$$\alpha = n/m = O(m)/m = O(1)$$

e il costo medio della ricerca risulta

$$\Theta(1+\alpha) = \Theta(1+1) = \Theta(1)$$

Indirizzamento Aperto

La rappresentazione non fa uso di puntatori

Le collisioni vengono gestite memorizzando elementi collidenti in altre posizioni della tabella

Invece di seguire le liste di collisione, calcoliamo la sequenza di posizioni da esaminare

Il fattore di carico non può mai superare 1

Si usa meno memoria rispetto alla rappresentazione con liste di collisione perchè non ci sono puntatori

Indirizzamento Aperto

Prevede che si usi solo lo spazio della tabella, senza uso di zone di trabocco, allocando gli elementi che determinano collisioni in posizioni diverse da quella che loro competerebbe

Supponiamo di voler inserire un elemento con chiave k e la sua posizione "naturale" $h(k)$ sia già occupata

Cerchiamo la cella vuota (se c'è) scandendo le celle secondo una sequenza di indici; ad esempio:

$$\begin{array}{llll} c(k,0) & c(k,1) & \dots & c(k,m) \\ c(k,0) = h(k) & c(k,1) = h(k)+1 & \dots & c(k,m-1) = h(k)+m-1 \end{array}$$

Indirizzamento Aperto

Per inserire una nuova chiave si esamina una successione di posizioni della tabella, si esegue una **scansione**, finchè non si trova una posizione vuota in cui inserire la chiave

La sequenza di posizioni esaminate dipende dalla chiave che deve essere inserita

Estendiamo la funzione hash in modo che possa tener conto anche del numero di posizioni già esaminate

$$h : U \times \{0, 1, \ldots, m-1\} \rightarrow \{0, 1, \ldots, m-1\}$$

Operazione di Inserimento

Hash-Insert(T, k)
  $i \leftarrow 0$ ▷ i è il numero diposizioni già esaminate
  repeat
    $j \leftarrow h(k, i)$
    if $T[j] = \text{NIL}$ or $T[j] = \text{DELETED}$
      then $T[j] = k$ **return** j
      else $i \leftarrow i + 1$
  until $i = m$
  error "overflow sulla tabella hash"

Operazione di Ricerca

Hash-Search(T, k)
  $i \leftarrow 0$
  repeat
    $j \leftarrow h(k, i)$
    if $T[j] = k$ **return** j
    $i \leftarrow i + 1$
  until $T[j] = \text{NIL}$ or $i = m$
  return NIL

Operazione di Cancellazione

Il problema della cancellazione di un elemento in una tabella hash ad indirizzamento aperto è appena un pò più complesso

Se eliminiamo un elemento da una posizione *i* della tabella non si può semplicemente marcare questa posizione con NIL: spezzeremo la sequenza di scansione delle eventuali chiavi collidenti con la chiave da cancellare

Possiamo marcare la posizione con un valore speciale, DELETED, e modificare consistentemente la procedura **Hash-Insert**

Così facendo i tempi di ricerca non dipendo più solo dal fattore di carico α; l'uso di liste di collisione è più comune se si ammettono cancellazioni frequenti

Analisi del costo di scansione

Il costo viene espresso in termini del fattore di carico $\alpha = n/m$ dove n è il numero di elementi presenti nella tabella ed m è la dimensione della tabella

Nel caso dell'indirizzamento aperto, $n \leq m$ e quindi $\alpha \leq 1$

Ipotesi: viene usata una funzione hash uniforme; data una chiave k, la sequenza di scansione

$$\langle h(k,0), h(k,1), \ldots, h(k,m-1) \rangle$$

è in modo equamente probabile, una qualunque permutazione di $\langle 0, 1 \ldots, m-1 \rangle$

Ricerca senza successo

Teorema (ricerca senza successo): in una tabella hash ad indirizzamento aperto con fattore di carico $\alpha = n/m < 1$, il numero medio di accessi per una ricerca senza successo è al più

$$\frac{1}{(1-\alpha)}$$

assumendo l'uniformità della funzione hash

Inserimento

Teorema (inserimento): l'inserimento in una tabella hash ad indirizzamento aperto con fattore di carico α, richiede un numero medio di accessi pari al più a

$$\frac{1}{(1-\alpha)}$$

assumendo l'uniformità della funzione hash

Ricerca con successo

Teorema (ricerca con successo): in una tabella hash ad indirizzamento aperto con fattore di carico $\alpha = n/m < 1$, il numero medio di accessi per una ricerca con successo è al più

$$\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\alpha}$$

assumendo l'uniformità della funzione hash

Nota: $\ln = \log_e$ è il logaritmo naturale

Concatenazione vs indirizzamento aperto

Si dimostra analiticamente che per ogni $0 < \alpha < 1$

- $\frac{1}{1-\alpha} > 1 + \alpha$
- $\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) > 1 + \frac{\alpha}{2}$
- $\frac{1}{1-\alpha} > \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$

Concatenazione vs indirizzamento aperto

	Concat.	Ind. Aperto	
Ricerca senza successo	$1+\alpha$	$\frac{1}{1-\alpha}$	$1+\alpha = O\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$
Ricerca con successo	$1+\alpha$	$\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$	$1+\alpha = \Theta(1+\alpha/2) = O\left(\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\right)$

Inoltre $\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) = O\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$

Parte III

Indirizzamento aperto: tecniche di scansione

Scansione Lineare

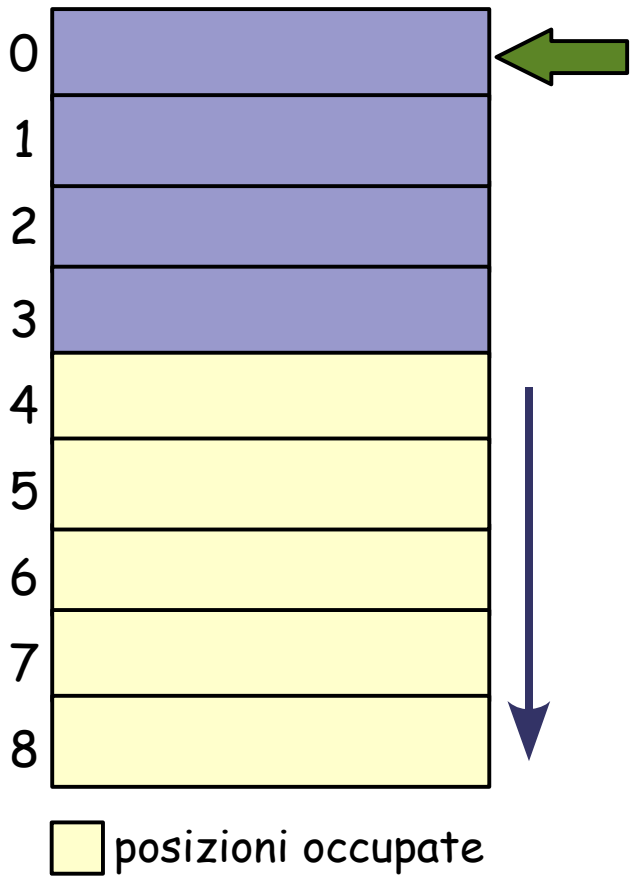
Sia $h' : U \longrightarrow \{0, 1, \ldots, m-1\}$ una funzione hash "ordinaria"

Il metodo di scansione lineare usa la funzione hash (estesa) definita come

$$h(k, i) = \big(h'(k) + i\big) \bmod m$$

$h(k, 0) = h'(k) \bmod m$,
$h(k, 1) = (h'(k) + 1) \bmod m$,
$h(k, 2) = (h'(k) + 2) \bmod m$, ...

Scansione Lineare



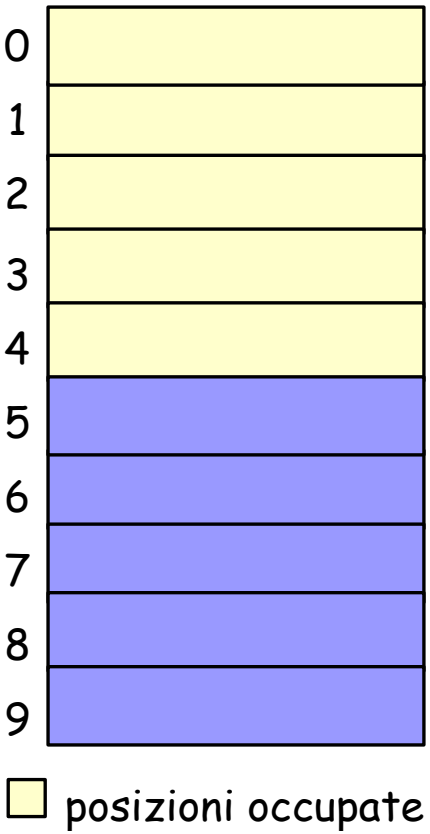
Hash-Insert(T,k) con h'(k) = 4

h(k,0) = (h'(k) + 0) mod 9 = 4 mod 9 = 4
h(k,1) = (h'(k) + 1) mod 9 = 5 mod 9 = 5
h(k,2) = (h'(k) + 2) mod 9 = 6 mod 9 = 6
h(k,3) = (h'(k) + 3) mod 9 = 7 mod 9 = 7
h(k,4) = (h'(k) + 4) mod 9 = 8 mod 9 = 8
h(k,5) = (h'(k) + 5) mod 9 = 9 mod 9 = 0

Scansione Lineare

È facile da implementare ma ...

presenta un fenomeno conosciuto come **agglomerazione primaria**: le posizioni occupate della tabella si accumulano per lunghi tratti, aumentando così il tempo medio di ricerca

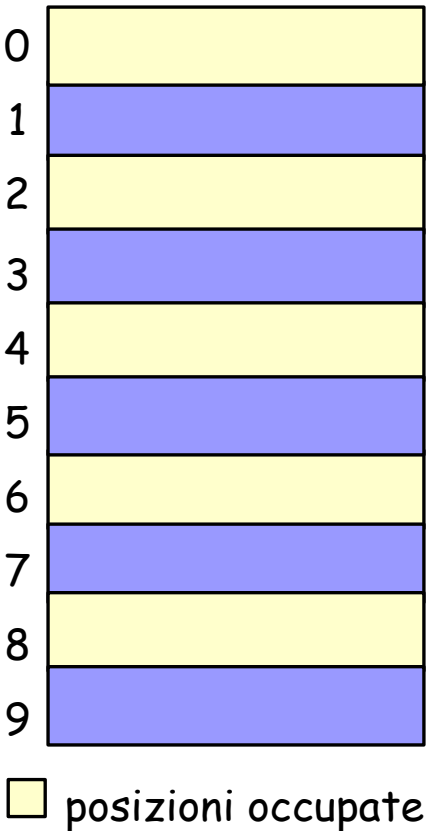


Calcoliamo il numero medio di accessi per una ricerca senza successo

$$\sum_{i=0}^{9} \#\text{acc}[h'(k) = i] \cdot \overbrace{Pr\{h'(k) = i\}}^{=\frac{1}{10}}$$

$h'(k)$	#acc
0	6
1	5
2	4
3	3
4	2
5–9	1

$$\frac{1}{10} \sum_{i=0}^{9} \#\text{acc}[h'(k) = i] = \frac{1}{10} \cdot 25 = 2.5$$



Di nuovo, il numero medio di accessi è

$$\sum_{i=0}^{9} \#\text{acc}[h'(k) = i] \cdot \overbrace{Pr\{h'(k) = i\}}^{=\frac{1}{10}}$$

$h'(k)$	#acc
pari	2
dispari	1

$$\frac{1}{10}((2 \cdot 5) + (1 \cdot 5)) = 1.5$$

Inoltre ...

La prima posizione esaminata determina l'intera sequenza di scansione; quindi abbiamo solo m sequenze di scansione distinte

Il numero ottimo è $m!$ ed è dato dall'ipotesi di unformità della funzione hash: ognuna delle $m!$ permutazioni di $\langle 0, \ldots, m-1 \rangle$ è equiprobabile

Siamo molto lontani dal numero ottimo

Scansione Quadratica

Sia $h' : U \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$ una funzione hash "ordinaria"

Il metodo di scansione quadratica usa la funzione hash (estesa) definita come

$$h(k, i) = \left(h'(k) + c_1 i + c_2 i^2\right) \bmod m$$

dove, c_1 e c_2 sono delle costanti ausiliarie (con $c_2 \neq 0$)

Le posizioni esaminate sono distanziate da quantità che dipendono in maniera quadratica da i

Elimina il problema dell'agglomerazione primaria

Scansione Quadratica

$$h(k,i) = \left(h'(k) + i + i^2\right) \mod 10 \text{ con } h'(k) = k \mod 10$$

$h(7,0) = h'(7) = 7$
$h(7,1) = (7+1+1) \mod 10 = 9$
$h(7,2) = (7+2+4) \mod 10 = 13 \mod 10 = 3$
$h(7,3) = (7+3+9) \mod 10 = 19 \mod 10 = 9$
$h(7,4) = (7+4+16) \mod 10 = 27 \mod 10 = 7$
$h(7,5) = (7+5+25) \mod 10 = 37 \mod 10 = 7$
$h(7,6) = (7+6+36) \mod 10 = 49 \mod 10 = 9$
$h(7,6) = (7+6+36) \mod 10 = 49 \mod 10 = 9$
$h(7,7) = (7+7+49) \mod 10 = 63 \mod 10 = 3$
$h(7,8) = (7+8+64) \mod 10 = 79 \mod 10 = 9$
$h(7,9) = (7+9+81) \mod 10 = 97 \mod 10 = 7$

Viene scandita solo una porzione (3/10) della tabella

Scansione Quadratica

Elimina il problema dell'agglomerazione primaria, ma ...

(1) viene usata l'intera tabella solo per alcune combinazioni di c_1, c_2 ed m; se $m = 2^p$ una buona scelta è $c_1 = c_2 = 1/2$, perchè i valori $h(k, i)$ per $i \in [0, m-1]$ sono tutti distinti

(2) $h(k_1, 0) = h(k_2, 0)$ implica $h(k_1, i) = h(k_2, i)$
questo porta ad una forma di addensamento (più lieve rispetto a quella primaria) detta **agglomerazione secondaria**

(3) di nuovo, la prima posizione determina l'intera sequenza di scansione ed abbiamo solo m sequenze di scansione distinte

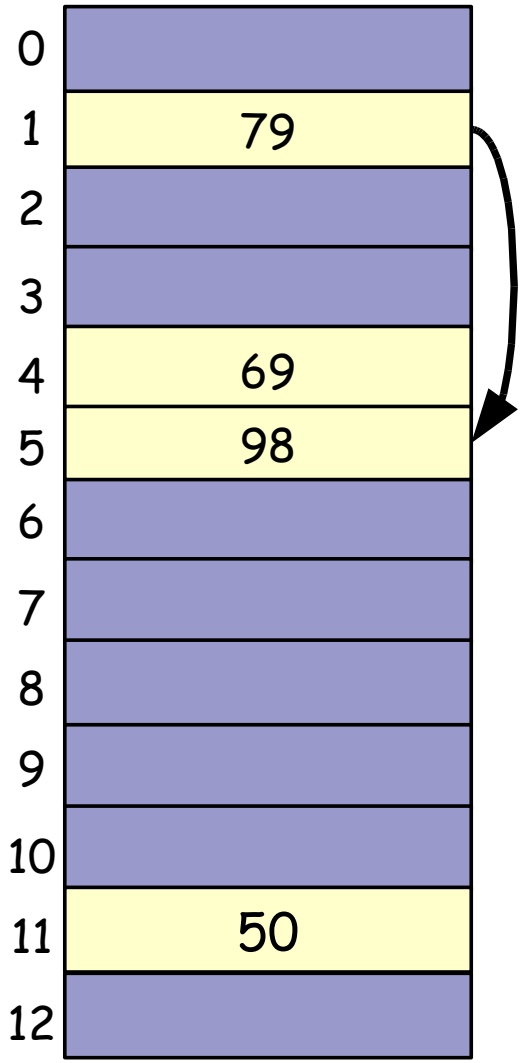
Hashing Doppio

L'**hashing doppio** usa una funzione hash (estesa) della forma

$$h(k,i) = \big(h_1(k) + ih_2(k)\big) \bmod m$$

dove h_1, h_2 sono delle funzioni hash (ordinarie) ausiliarie

Hashing Doppio



$k = 14$

$h_1(k) = k \bmod 13 = 1$

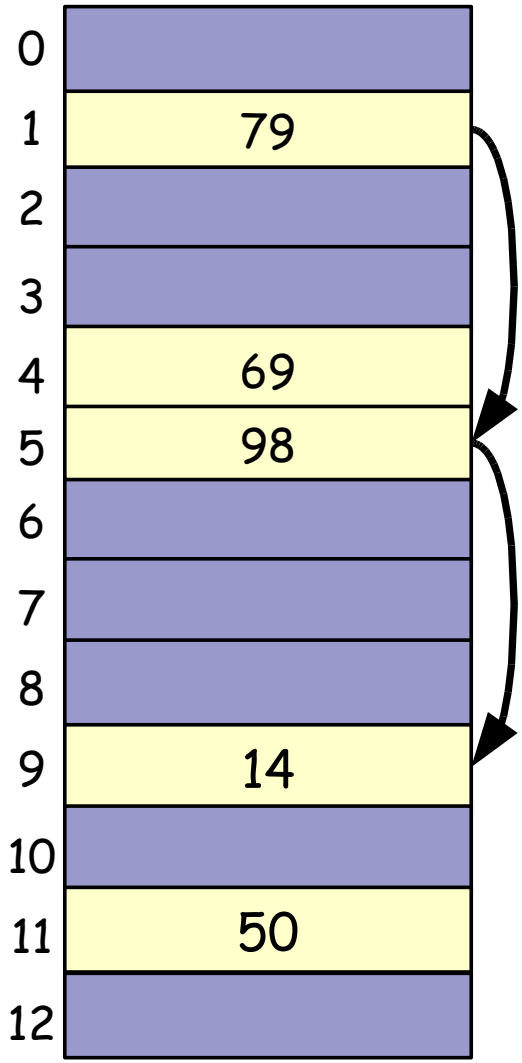
$h_2(k) = 1 + (k \bmod 11) = 4$

$h(k, i) = (1 + i \cdot 4) \bmod 13$

$h(k,0) = 1 \bmod 13 = 1$

$h(k,1) = (1 + 1 \cdot 4) \bmod 13 = 5$

Hashing Doppio



$k = 14$

$h_1(k) = k \bmod 13 = 1$

$h_2(k) = 1 + (k \bmod 11) = 4$

$h(k, i) = (1 + i \cdot 4) \bmod 13$

$h(k,0) = 1 \bmod 13 = 1$

$h(k,1) = (1 + 1 \cdot 4) \bmod 13 = 5$

$h(k,2) = (1 + 2 \cdot 4) \bmod 13 = 9$

Hashing Doppio

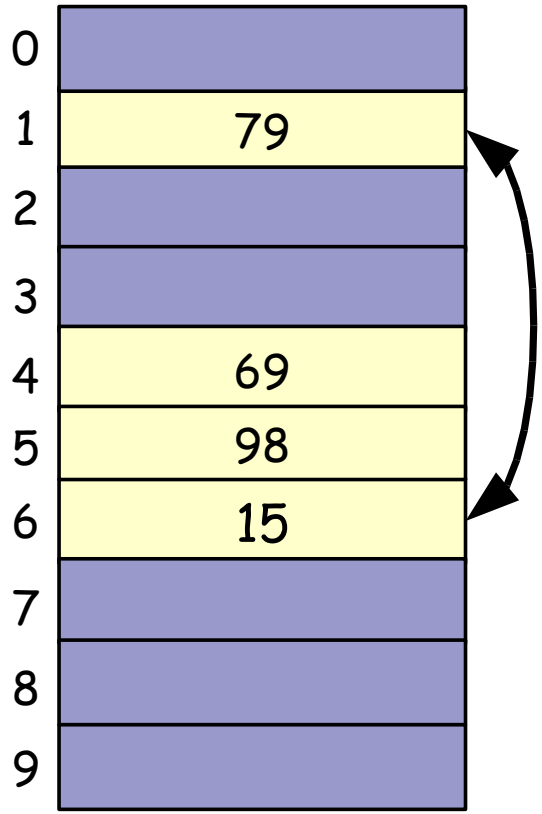
La prima posizione esaminata è $T[h_1(k)] \bmod m$; ogni posizione esaminata successivamente è distanziata dalla precedente di una quantità $h_2(k) \bmod m$

La sequenza di scansione dipende da k in due modi: a seconda della chiave, possono variare sia la posizione iniziale che il passo

L'hashing doppio non soffre di fenomeni di agglomerazione perchè il passo è casuale inoltre ...

Ogni possibile coppia $(h_1(k), h_2(k))$ produce una sequenza di scansione distinta: abbiamo $O(m^2)$ sequenze di scansione distinte ed in questo senso è migliore sia della scansione lineare che quadratica

Hashing Doppio



K = 14

$h_1(k) = k \bmod 13 = 1$

$h_2(k) = 1 + (k \bmod 10) = 5$

$h_2(k)$ non è primo con m

$h(k,0) = (1 + 0 \cdot 5) \bmod 10 = 1$
$h(k,1) = (1 + 1 \cdot 5) \bmod 10 = 6$
$h(k,2) = (1 + 2 \cdot 5) \bmod 10 = 1$
$h(k,3) = (1 + 3 \cdot 5) \bmod 10 = 6$
$h(k,4) = (1 + 4 \cdot 5) \bmod 10 = 1$
....

Hashing Doppio

Il valore di $h_2(k)$ deve essere primo con la dimensione m della tabella per ogni chiave da cercare

Infatti se $\text{MCD}(h_2(k), m) = d > 1$ per qualche k, allora la ricerca di tale chiave andrebbe ad esaminare solo una porzione $(1/d)$ della tabella

Se m è una potenza di 2, basta definire h_2 in maniera tale che restituisca sempre un numero dispari

Altro modo è scegliere m primo e porre $h_1(k) = k \bmod m$, $h_2(k) = 1 + (k \bmod m')$ dove m' è appena più piccolo di m (ad esempio $m' = m - 1$ oppure $m' = m - 2$)