Alcune varianti del problema della selezione di attività

Esercizio 1: S*i supponga di modificare il problema della selezione di attività in maniera tale da scegliere di volta in volta l'attività con maggior tempo di inizio (ossia l'attività che inizia per ultima) tra tutte le attività compatibili con quella appena inserita. Dimostrate che questo algoritmo fornisce una soluzione ottima.*

Soluzione:

Sia $S = \{ a_1, a_2, ..., a_n\}$ l'insieme di n attività. Assumiamo, inoltre, che le attività in S siano ordinate in maniere *decrescente* rispetto ai tempi di inizio, ossia che $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq ... \geq s_n$ (nella versione vista in classe, le attività in S erano ordinate in maniera crescente rispetto ai tempi di fine). In questo caso, la *scelta golosa* consiste nello scegliere l'attività con *maggior tempo di inizio* compatibile con l'ultima attività inserita. Di conseguenza l'algoritmo goloso procederà come segue:

1. sceglie inizialmente l'attività a_1,
2. poi la prima attività (quella con maggior tempo di inizio) compatibile con a_1;
3. poi, la prima attività compatibile con la seconda attività scelta
4. e così via ...

Questo algoritmo è corretto? Per rispondere a questa domanda dimostriamo (nell'ordine) i seguenti punti:

1. la scelta golosa genera un solo sottoproblema;
2. il problema verifica la ***proprietà della scelta golosa***: ossia, che esiste sempre una soluzione ottima che contiene la scelta golosa;
3. è sempre possibile costruire una soluzione ottima combinando la scelta golosa con una soluzione ottima dell'unico sottoproblema che la scelta golosa genera (***versione golosa della sottostruttura ottima***).

Definiamo un appropriato spazio dei sottoproblemi. Indichiamo con $S_{ij} = \{ a_k \in S \mid f_i \leq s_k < f_k \leq s_j \}$ il sottoinsieme delle attività in S che iniziano dopo la fine di a_i e terminano prima dell'inizio di a_j.

Proprietà 1: Se $i \geq j$ allora $S_{ij} = \emptyset$.

Dimostrazione: Assumiamo $i \geq j$ e (per assurdo) che un'attività a_k appartenga ad $S_{ij} \neq \emptyset$. Allora, dalla definizione di S_{ij}, abbiamo che $f_i \leq s_k < f_k \leq s_j$ e quindi $f_i < s_j$. Poiché $s_i < f_i$, possiamo concludere che $s_i < s_j$. Ma questo contraddice l'assunzione che le attività in S sono ordinate in maniere decrescente rispetto ai tempi di inizio (in base a questa ipotesi, infatti, $i \geq j$ implica $s_i \geq s_j$).

Per la **Proprietà 1**, dobbiamo preoccuparci solo dei sottoproblemi S_{ij} con $i < j$ (gli unici non vuoti).

1. La scelta golosa genera un solo sottoproblema

Assumiamo di dover risolvere un sottoproblema $S_{ij} \neq \emptyset$ e sia a_m una qualsiasi attività in S_{ij}. Possiamo utilizzare a_m per individuare due sottoproblemi di S_{ij}. Infatti, $S_{ij} = S_{im} \cup \{ a_m \} \cup S_{mj}$, alle altre dove:

- $S_{im} = \{ a_k \in S \mid f_i \leq s_k < f_k \leq s_m \}$ insieme delle attività che iniziano dopo la fine di a_i e finiscono prima dell'inizio di a_m

- $S_{mj} = \{ a_k \in S \mid f_m \le s_k < f_k \le s_j \}$ insieme delle attività che iniziano dopo la fine di a_m e finiscono prima dell'inizio di a_j

Se a_m rappresenta la scelta golosa, ossia l'attività in S_{ij} con *maggior* tempo di inizio, allora $S_{mj} = \varnothing$. Infatti, se (per assurdo) esistesse un attività $a_k \in S_{mj}$ allora avremmo che $s_m < f_m \le s_k$, ossia $s_m < s_k$ (il che contraddice l'ipotesi che a_m è l'attività in S_{ij} con *maggior* tempo di inizio).

2. Proprietà della scelta golosa

Per ogni sottoproblema non banale $S_{ij} \neq \varnothing$, esiste *sempre* una soluzione ottima che contiene la scelta golosa.

Sia $S_{ij} \neq \varnothing$ un sottoproblema non banale e A una soluzione ottima per S_{ij} ($A \subseteq S_{ij}$ di cardinalità massima e contenente solo attività mutuamente compatibili). Assumiamo inoltre che A *non* contenga la scelta golosa, ossia l'attività in S_{ij} con *maggior* tempo di inizio (di seguito questa attività verrà indicata con a_m). Sia infine, a_k l'attività in A con *maggior* tempo di inizio.

Dimostriamo una interessante proprietà di a_k (che tornerà utile nel seguito). Sia a_p una qualsiasi attività in A diversa da a_k.

- $s_k \ge s_p$ (a_k è l'attività in A con *maggior* tempo di inizio) e $f_k > s_k$ implicano $f_k > s_p$ (non è vero che a_p comincia dopo che a_k è terminata),
- allora a_k compatibile con a_p implica $f_p \le s_k$ (deve essere vero che a_p termina prima che a_k cominci).

Vogliamo ora dimostrare che l'insieme

$$A' = (A - \{ a_k \}) \cup \{ a_m \}$$

è una soluzione *ammissibile* per S_{ij} e quindi che A' contiene solo attività mutuamente compatibili. Questo, più il fatto che $|A'| = |A|$, ci permette di concludere che A' è anche ottima.

Ammissibilità di A'

Osserviamo che tutte le attività in $A - \{ a_k \}$ sono compatibili (semplicemente perchè lo erano in A). Quindi, per dimostrare che A' è ammissibile ci basta verificare che a_m è compatibile con ogni attività in A diversa da a_k.

Sia a_p un'attività in A diversa da a_k. Poichè $f_p \le s_k$ (vedi sopra) e $s_k \le s_m$ (a_m è l'attività in S_{ij} con *maggior* tempo di inizio), possiamo concludere $f_p \le s_m$ e quindi che a_m è compatibile con a_p.

3. Sottostruttura ottima

Sia $S_{ij} \neq \varnothing$ un sottoproblema non banale e A una soluzione ottima per S_{ij}, $a_m \in S_{ij}$ con maggior tempo di inizio e A_{ij} una soluzione ottima per S_{ij}. Per quanto visto nei due paragrafi precedenti, possiamo sempre assumere che $A_{ij} = \{a_m\} \cup A_{im}$, dove A_{im} è una soluzione per il sottoproblema S_{im} (l'unico non vuoto generato dalla scelta golosa). In questo caso dimostrare la sottostruttura ottima significa dimostrare che A_{im} è una soluzione ottima per S_{im}.

Assumiamo (per assurdo) che A_{im} non sia una soluzione ottima per S_{im}. Allora deve esistere una soluzione A'_{im} "migliore" di A_{im}, ossia t.c. $| A'_{im} | > | A_{im} |$ (A'_{im} contiene un numero maggiore di attività compatibili rispetto ad A_{im}). Osserviamo che A'_{im} è una soluzione per $S_{im} = \{ a_k \in S \mid f_i \le s_k < f_k \le s_m \}$ e quindi contiene solo attività che finiscono prima che a_m inizi (e quindi compatibili con a_m). Allora, $A'_{ij} = \{a_m\} \cup A'_{im}$ è una soluzione ammissibile per S_{im} la cui cardinalità è $|A_{ij}|=|A'_{im}| + 1 >|A_{im}| +1 > |A_{ij}|$. Il che contraddice l'assunzione che A_{ij} è ottima.

Esercizio 2: S*i supponga di modificare il problema della selezione di attività in maniera tale da scegliere di volta in volta l'attività con minor durata tra tutte le attività compatibili con quella appena inserita. Dimostrate che, in questo caso, un algoritmo* ***non*** *fornisce una soluzione ottima.*

Soluzione:

Si consideri il seguente esempio:

i	1	2	3
s_i	0	2	3
f_i	3	4	6
durata	3	2	3

l'algoritmo goloso fornirebbe come soluzione l'insieme $\{a_2\}$, mentre la soluzione ottimale è A= $\{a_1, a_3\}$.

Proviamo a modificare A in modo da rimpiazzare l'attività con minor durata (possiamo scegliere indifferentemente sia a_1 che a_3) con la scelta golosa a_2.

Sostituendo a_1 (lo stesso discorso vale anche per a_3) con a_2, otteniamo un insieme di attività non compatibile tra di loro quindi la soluzione non è ammissibile.