Algoritmi e Strutture Dati

Analisi asintotica e Ricorrenze – Esercizi

Maria Rita Di Berardini, Emanuela Merelli[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Camerino

A.A. 2006/07

Parte I

Notazioni O, Ω e Θ

Vero o falso: $3n^2 + 7n = \Theta(n^2)$

Sia $f(n) = 3n^2 + 7n$. Dobbiamo dimostrare che (1) $f(n) = O(n^2)$ e (2) $f(n) = \Omega(n^2)$

- (1): dobbiamo dimostrare che esistono delle costanti positive c_1 ed n_0 tali che $0 \leq f(n) \leq c_1 n^2$ per ogni $n \geq n_0$. Possiamo procedere così:

$$\begin{aligned} f(n) &= 3n^2 + 7n \\ &\leq 3n^2 + 7n^2 \quad \text{per ogni } n \geq n_0 = 0 \\ &= 10n^2 \end{aligned}$$

Basta scegliere $c = 10$ ed $n_0 = 0$

Vero o falso: $3n^2 + 7n = \Theta(n^2)$

- (2): dobbiamo dimostrare che esistono delle costanti positive c_2 ed n_0 tali che $0 \leq c_2 n^2 \leq f(n)$ per ogni $n \geq n_0$. Possiamo procedere così:

$$\begin{aligned} f(n) &= 3n^2 + 7n \\ &\geq 3n^2 \qquad\qquad \text{per ogni } n \geq n_0 = 0 \end{aligned}$$

Basta scegliere $c_2 = 3$ ed $n_0 = 0$

Vero o falso: $6n^2 = O(n)$, $6n^2 = \Omega(n^3)$

- $f(n) = 6n^2 = O(n)$ se e solo se esistono delle costanti positive c ed n_0 tali che $0 \leq f(n) \leq cn$ per ogni $n \geq n_0$

  Ma $6n^2 \leq cn$ per ogni $n \geq n_0 \iff 6n \leq c$ per ogni $n \geq n_0$, il che è impossibile visto che c è una costante ed n cresce arbitrariamente

- $f(n) = 6n^2 = \Omega(n^3)$ se e solo se esistono delle costanti positive c ed n_0 tali che $0 \leq cn \leq f(n)$ per ogni $n \geq n_0$

  Ma $cn \leq 6n^2$ per ogni $n \geq n_0 \iff c \leq 6/n$ per ogni $n \geq n_0$, il che è impossibile visto che c è una costante, n cresce arbitrariamente e quindi $1/n$ decresce arbitrariamente

Logaritmo vs lineare: $\log_2 n = O(n)$

Dobbiamo dimostrare che ossia che esistono delle costanti positive c ed n_0 tali che $0 \leq \log_2 n \leq cn$. Procediamo per induzione su $n \geq 1$

- Caso base $n = 1$: $log_2 1 = 0 \leq c$ per ogni costante positiva c
- Passo induttivo: assumiamo $\log_2 n \leq cn$ per ogni $n \geq 1$ e dimostriamo che $\log_2(n+1) \leq c(n+1)$

$$
\begin{array}{rcll}
\log_2(n+1) & \leq & \log_2(n+n) & \text{per ogni } n \geq 1 \\
 & = & \log_2(2n) & \log_2(ab) = \log_2 a + \log_2 b \\
 & = & \log_2 2 + \log_2 n & \\
 & = & 1 + \log_2 n & \\
 & \leq & 1 + cn & \text{per ipotesi induttiva} \\
 & \leq & c + cn & \text{per ogni } c \text{ positiva } (c \geq 1) \\
 & = & c(n+1) &
\end{array}
$$

Alcune varianti

Se il logaritmo non è in base 2, cioè se $f(n) = \log_a n$?

E se il invece di $f(n) = \log_2 n$ abbiamo $f(n) = \log_2 n^a$ con $a > 1$?

Non cambia molto visto che:

- $a \neq 1$ implica $\log_a n = (\log_a 2)(\log_2 n)$, e
- $\log_2 n^a = a(\log_2 n)$

Alcune varianti

Dimostriamo che

$$f(n) = O(g(n)) \Longrightarrow af(n) = O(g(n) \text{ per ogni } a > 0$$

Se $f(n) = O(g(n))$ allora esistono delle costanti positive c ed n_0 tali che:

$$0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{per ogni } n \geq n_0$$

Moltiplicando tutto per a otteniamo

$$0 \leq af(n) \leq (ac)g(n) \text{per ogni } n \geq n_0$$

e quindi, per definizione, $af(n) = O(g(n))$

Alcune varianti

Ricapitolando:

$$\log_2 n = O(n) \text{ e } \log_a n = (\log_a 2)\log_2 n \text{ con } \log_a 2 > 0$$
$$\Downarrow$$
$$\log_a n = O(n)$$

e in maniera analoga

$$\log_2 n = O(n) \text{ e } \log_2 n^a = a \log_2 n \text{ con } a > 1$$
$$\Downarrow$$
$$\log_2 n^a = O(n)$$

$n^k = O(a^n)$ per ogni $k > 0$ e $a > 1$

N.B. $\log_a n = O(n)$ e, quindi, $k \log_a n = \log_a n^k = O(n)$ per ogni $k > 0$ e $a > 1$

Se $\log_a n^k = O(n)$ allora esistono c ed n_0 positivi tali che:

$$0 \leq \log_a n^k \leq cn \text{ per ogni } n \geq n_0$$

$$\Downarrow \text{ elevando tutto alla } a$$

$$1 \leq a^{\log_a n^k} \leq a^c n^a \text{ per ogni } n \geq n_0$$

Poichè $a^{\log_a n^k} = n^k$, abbiamo che

$$0 \leq n^k \leq (a^c) n^a \text{ per ogni } n \geq n_0$$

Per definizione $n^k = O(a^n)$

Esponenti con base diversa

Qual'è il rapporto tra 2^n e 3^n. Banalmente $2^n = O(3^n)$, ma il contrario (ossia $3^n = O(2^n)$) non è vero

Infatti, assumiamo che esistano c ed n_0 tali che:

$$3^n = (\frac{3}{2} \cdot 2)^n = (\frac{3}{2})^n \cdot 2^n \leq c2^n \text{ per ogni } n \geq n_0$$

L'ultima disequazione è vera se e solo se $c \geq (\frac{3}{2})^n$ per ogni $n \geq n_0$. Il che è impossibile

Parte II

Ricorrenze

Metodo della sostituzione: alcuni problemi matematici

Consideriamo la seguente ricorrenza

$$T(n) = \begin{cases} 1 + T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Osserviamo che $T(n)$ non è molto diversa da :

$$T_1(n) = \begin{cases} 1 + 2T(n/2) & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Ora, applicando il teorema master con $a = b = 2$, $\log_b a = 1$ e $f(n) = 1 = O(1) = O(n^0) = O(n^{1-1}) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ (dove $\varepsilon = 1 > 0$), abbiamo che $T_1(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n)$

Sapendo questo proviamo a dimostrare che $T(n) = O(n)$

Metodo della sostituzione: alcuni problemi matematici

Dobbiamo dimostrare che esistono delle costanti c ed $n_0 \geq 1$ tali che $T(n) \leq cn$

- Caso base $n = 1$: $T(1) = 1 \leq c1 = c$ per ogni c positiva
- Passo induttivo: $T(n') \leq cn'$, per ogni $n' \geq n$ e dimostriamo che $T(n) \leq cn$

$$\begin{array}{lcl} T(n) & = & 1 + T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) \\ \text{per ip. ind.} & \leq & 1 + c\lfloor n/2 \rfloor + c\lceil n/2 \rceil \\ & = & 1 + c(\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) \\ & = & 1 + cn^1 \\ & \not\leq & cn \end{array}$$

Non riusciamo a dimostrarlo per un fattore di ordine inferiore

[1] $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$ per ogni intero n

Metodo della sostituzione: alcuni problemi matematici

Proviamo con ipotesi induttiva più forte; sottraiamo un termine di ordine inferiore e proviamo dimostrare che $T(n) \leq cn - b$

- Caso base $n = 1$: $T(1) = 1 \leq c - b$ vero se scegliamo $c \geq 1 + b$
- Passo induttivo: assumiamo $T(n') \leq cn' - b$, per ogni $n' \geq n$ e dimostriamo che $T(n) \leq cn - b$

$$\begin{array}{lcl} T(n) & = & 1 + T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) \\ \text{per ip. ind.} & \leq & 1 + c\lfloor n/2 \rfloor - b + c\lceil n/2 \rceil - b \\ & = & c(\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 1 - 2b \\ & = & cn - (2b - 1) \\ & \leq & cn - b \end{array}$$

L'ultima disequazione è vera se scegliamo $-(2b - 1) \leq -b$, cioè $2b - 1 \geq b$ e, quindi, $b \geq 1$

Home-Work

Dimostrare che

$$T(n) = \begin{cases} c + T(n/2) & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

è tale che $T(n) = O(\log_2 n)$.

Suggerimento: $T(n)$ è simile a

$$T_1(n) = \begin{cases} 1 + 2T(n/2) & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Procedete in maniera simile

Fornire un **limite stretto** per la seguente ricorrenza utilizzando il metodo di iterazione

$$T(n) = \begin{cases} n + 4T(n/2) & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 4T(n/2) \\ &= n + 4n/2 + 4 \cdot 4T(n/4) = 3n + 16T(n/4) \\ &= 3n + 16n/4 + 16 \cdot 4T(n/8) = 7n + 64T(n/8) \\ &= 7n + 64n/8 + 64 \cdot 4T(n/16) = 15n + 256T(n/16) \end{aligned}$$

proviamo ad identificare una struttura comune

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n + 4T(n/2) = (2-1)n + 4T(n/2) \\
&= 3n + 16T(n/4) = (2^2-1)n + 4^2T(n/2^2) \\
&= 7n + 64T(n/8) = (2^3-1)n + 4^3T(n/2^3) \\
&= 15n + 256T(n/16) = (2^4-1)n + 4^4T(n/2^4) \\
&= \dots \\
&= (2^k-1)n + 4^kT(n/2^k)
\end{aligned}
$$

Ci fermiamo quando $n/2^k = 1$ e quindi quando $k = \log_2 n$. Allora:

$$T(n) = (2^{\log_2 n} - 1)n + 4^{\log_2 n}T(1) = n(n-1) + 4^{\log_2 n}$$

ora $4^{\log_2 n} = n^{\log_2 4} = n^2$ e quindi

$$T(n) = n(n-1) + 4^{\log_2 n} = n(n-1) + n^2 = 2n^2 - n = \Theta(n^2)$$

Fornire un **limite stretto** per la seguente ricorrenza utilizzando il metodo di iterazione

$$T(n) = \begin{cases} n^3 + 3T(n/3) & n > 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= n^3 + 3T(n/3) \\ &= n^3 + 3(n/3)^3 + 9T(n/9) = n^3 + n^3/9 + 9T(n/9) \\ &= n^3 + n^3/9 + 9(n/9)^3 + 27T(n/27) \\ &= n^3 + n^3/9 + n^3/9^2 + 27T(n/27) \\ &= \ldots \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n^3}{9^i} + 3^k T(n/3^k) = n^3 \sum_{i=0}^{k-1} (\tfrac{1}{9})^i + 3^k T(n/3^k) \end{aligned}$$

In questo caso ci fermiamo quando $n/3^k = 1$, ossia $k = \log_3 n$, quindi:

$$T(n) = n^3 \sum_{i=0}^{\log_3 n-1} (\frac{1}{9})^i + 3^{\log_3 n} T(1) = n^3 \sum_{i=0}^{\log_3 n-1} (\frac{1}{9})^i + n$$

$$\sum_{i=0}^{\log_3 n-1} (\frac{1}{9})^i = \frac{1-(1/9)^{\log_3 n}}{1-1/9} = \frac{1-(1/9^{\log_3 n})}{8/9} = \frac{1-(1/n^{\log_3 9})}{8/9}$$

$$= \frac{1-(1/n^2)}{8/9} = \frac{9}{8}(1-1/n^2) = \frac{9}{8}\ \frac{n^2-1}{n^2}$$

Allora:

$$T(n) = n^3 \sum_{i=0}^{\log_3 n-1} (\frac{1}{9})^i + n = n^3\ \frac{9}{8}\ \frac{n^2-1}{n^2} + n$$

$$= \frac{9}{8}\ n(n^2-1) + n = \Theta(n^3)$$

Home-Work

Risolvere ogni ricorrenza proposta nelle sezioni precedenti applicando il metodo master