Potenze - Monomi - Polinomi - Operazioni tra Polinomi - Quadrato e Cubo del Binomio - Quadrato del Trinomio

Francesco Zumbo

www.francescozumbo.it

http://it.geocities.com/zumbof/

Questi appunti vogliono essere un ulteriore strumento didattico per gli studenti. Idea che mi é venuta dopo essere stato a contatto con bambini e studenti affetti da Sclerosi Multipla, costretti a lunghe degenze presso il Reparto di Neurologia dell'Ospedale di Fidenza (Parma), Divisione Diretta da una Eccezionale persona, il ***Prof. Enrico Montanari*** *a cui mia riconoscenza e stima andranno Sempre.*

A coloro che vorranno dare un piccolo contributo all'Associazione Nazionale per la Lotta Contro la Sclerosi Multipla (sezione di Parma) un Grande Grazie!!!

Conto Corrente Postale : 13 50 34 38 - Intestato a: AISM di Parma (Associazione Italiana Sclerosi Multipla) di Parma - Indirizzo: Piazzale S. Sepolcro, 3 - 43100 Parma (PR) - Telefono : 0521-231251.

Con la seguente Causale: **+ Matematica ,- Sclerosi Multipla**

1. DEFINIZIONE DI POTENZA

Supponiamo di avere un prodotto del tipo

$$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{6-quantit\acute{a}}$$

tale scrittura la sintetizza con:

$$5^6 \tag{1.1}$$

il numero in alto *Esponente* indica quante volte stiamo moltiplicando il numero 5 *base* per se stesso.

2. POTENZE PARTICOLARI

2.1. **Potenze ad esponente negativo.** Cosa significa potenza ad esponente negativo?

$$4^{-3} = ? \tag{2.1}$$

tale scrittura la si usa per sintetizzare:

$$\frac{1}{4^3} = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} \tag{2.2}$$

da cui

$$4^{-3} =^{def} \frac{1}{4^3} \tag{2.3}$$

Le potenze ad esponente negativo sono il reciproco della stessa potenza ad esponente positivo

Tale definizione in matematica é molto utile , ad esempio nei casi

$$\frac{1}{4^{-5}} = 4^5$$

$$\frac{3}{5^4} = 3 \ \cdot 5^{-4}$$

tali proprieá si applicano molto nelle equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche.

2.2. **Potenze con esponente 0.** La potenza

$$4^0 =^{def} 1 \tag{2.4}$$

qualsiasi potenza ad esponente nullo vale 1.

$$3^0 = 2^0 = (\frac{5}{3})^0 = 1 \tag{2.5}$$

Ogni base elevata ad esponente nullo vale 1.

2.3. **Potenze ad esponente frazionario o razionale.**

$$7^{\frac{4}{3}} =^{def} \sqrt[3]{7^4} \tag{2.6}$$

il denominatore della frazione va all'indice della radice e il numeratore va all'esponente del radicando, cioé della quantitá sotto radice.

3. Proprietá delle potenze

3.1. **Prodotto di potenze che hanno la stessa base.** Supponiamo di avere il seguente prodotto

$$5^3 \cdot 5^6 = \tag{3.1}$$

equivale a

$$= \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5)}_{3-fattori} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)}_{6-fattori} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{9-quantit\acute{a}} = \tag{3.2}$$

$$= 5^9 \tag{3.3}$$

In definitiva

$$5^3 \cdot 5^6 = 5^{3+6} = 5^9 \tag{3.4}$$

Il prodotto di due o piú potenze che hanno la stessa base é uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti delle singole potenze.

3.2. **Divisione tra due potenze con la stessa base.** Dato il rapporto tra potenze

$$\frac{6^7}{6^3} = \tag{3.5}$$

$$= \frac{\overbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}^{7-fattori}}{\underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6}_{3-fattori}} = 6^{7-3} = 6^4 \tag{3.6}$$

In generale

$$\frac{6^m}{6^n} =^{def} 6^{m-n} \tag{3.7}$$

Il rapporto tra due potenze che hanno la stessa base é uguale ad una potenza che ha la stessa base e per esponente la differenza tra l'esponente del numeratore e quello del denominatore.

3.3. **Somma di piú potenze che hanno la stessa base.** Data la somma

$$4^3 + 4^5 \tag{3.8}$$

in tale situazione non é possibile sintetizzare come in precedenza il valore, una cosa peró la si puó fare, tra le due potenze si osserva quale é la quantitá piú grande che le divide, cioé occorre trovare il M.C.D (massimo comune divisore) tra le due potenze e successivamente si puó scrivere in forma differente la (3.8):

$$4^3(1 + 4^2) \tag{3.9}$$

tale operazione l' abbiamo fatta mettendo in evidenza 4^3 e dividendo 4^3 e 4^5 per il termine in evidenza 4^3.

*Situazione analoga per la **differenza** tra potenze che hanno la stessa base*

3.4. **Potenza di potenza.** Data la potenza

$$\{3^4\}^5 = \tag{3.10}$$

per la definizione di potenza ció equivale a scrivere

$$= \underbrace{3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4}_{5-quantit\acute{a}} = 3^{4+4+4+4+4} = 3^{4 \cdot 5} = 3^{20} \tag{3.11}$$

In definitiva

$$\{3^4\}^5 = 3^{20} \tag{3.12}$$

In generale

$$\{3^m\}^n = 3^{m \cdot n} \tag{3.13}$$

con m, n qualsiasi $\in \mathbb{Z}$.

La potenza di una potenza é una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

4. Le potenze nel calcolo letterale

Se la base di una potenza é una lettera tutte le proprietá che abbiamo visto con la base numerica sono valide, infatti si ha:

5. Potenze Particolari

5.1. **Potenze ad esponente negativo.**

$$a^{-3} =^{def} \frac{1}{a^3} \tag{5.1}$$

Le potenze ad esponente negativo sono il reciproco della stessa potenza ad esponente positivo

5.2. **Potenze ad esponente nullo,0.**

$$a^0 = b^0 = (\frac{c}{d})^0 = 1 \tag{5.2}$$

5.3. Potenze ad esponente frazionario o razionale.

$$a^{\frac{4}{3}} =^{def} \sqrt[3]{a^4} \tag{5.3}$$

6. Proprietá delle potenze

6.1. Prodotto di potenze che hanno la stessa base.

$$b^3 \cdot b^6 = b^9 \tag{6.1}$$

generalizzando

$$b^m \cdot b^n = b^{m+n} \tag{6.2}$$

Il prodotto di due o piú potenze che hanno la stessa base é uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti delle singole potenze.

6.2. Divisione tra due potenze con la stessa base.

$$\frac{a^7}{a^3} = a^{7-3} = a^4 \tag{6.3}$$

In generale

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{6.4}$$

Il rapporto tra due potenze che hanno la stessa base é uguale ad una potenza che ha la stessa base e per esponente la differenza tra l'esponente del numeratore e quello del denominatore.

6.3. Somma di piú potenze che hanno la stessa base.

$$a^3 + a^5 = a^3(1 + a^2) \tag{6.5}$$

Situazione analoga per la ***differenza*** *tra potenze che hanno la stessa base*

6.4. **Potenza di potenza.** Supponiamo di avere

$$\{a^4\}^5 = a^{4\cdot 5} = a^{20} \tag{6.6}$$

In generale

$$\{a^m\}^n = a^{m\cdot n} \tag{6.7}$$

con m, n qualsiasi $\in \mathbb{Z}$.

La potenza di una potenza é una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

7. MONOMI

Definiamo monomio una struttura algebrica del tipo

$$a^4b^3c \tag{7.1}$$

dove le quantitá sono tra loro legate dall'operazione di prodotto

7.1. **Grado di un monomio.** Definiamo grado di un monomio la somma degli esponenti delle lettere che compongono il monomio, ad esempio per il monomio precedente il grado é 8.

7.2. **Prodotto tra monomi.** Dato il seguente prodotto tra monomi

$$a^3b^2 \cdot a^7b^3c^5 \tag{7.2}$$

per calcolare tale prodotto occorre applicare le regole sulle potenze che abbiamo visto in precedenza

$$a^3b^2 \cdot a^7b^3c^5 = a^{3+7}b^{2+3}c^5 \tag{7.3}$$

cioé

$$a^3b^2 \cdot a^7b^3c^5 = a^{10}b^5c^5 \tag{7.4}$$

7.3. **Esempio di prodotto tra piú monomi.** Supponiamo di avere il seguente prodotto tra monomi

$$2a^3b^2c^4 \cdot a^5c^2 \cdot (-3a^2d^2e) = \tag{7.5}$$

tale prodotto é molto semplice da calcolare infatti lo si fa con le regole delle potenze e tenendo conto che occorre moltiplicare: *prima i segni, poi i numeri ed infine le potenze*

$$= -6\, a^{3+5+2}\, b^2\, c^{4+2}\, d^2 \; = \tag{7.6}$$

cioé

$$= -6a^{10}b^2c^6d^2 \tag{7.7}$$

7.4. **Rapporto tra due monomi.** Nel rapporto tra monomi

$$\frac{a^5b^3c}{a^2bd^2} \tag{7.8}$$

si applicano le regole delle potenze e si ha:

$$a^{5-2}b^{3-1}c\,\frac{1}{d^2} = \frac{a^3b^2c}{d^2} \tag{7.9}$$

in generale

$$\frac{a^m b^n c^p}{a^q b^r c^s} = a^{m-q} b^{n-r} c^{p-s} \tag{7.10}$$

7.5. **Monomi omogenei o simili.** Due o piú monomi si dicono omogenei se hanno la stessa ***parola***, dove si definisce parola il prodotto tra le lettere con potenza, la parola é un monomio.

Esempio di parole diverse:

$$ab \neq a^2b^3$$

Esempio di parole uguali

$$2ab^4 \;\; e \;\; 3ab^4$$

devono essere uguali sia le lettere che gli esponenti di ciascuna lettera.

Esempio di monomi simili

$$\frac{1}{2}\,a^3b^5c \;\; e \;\; 3\,a^3b^5c \tag{7.11}$$

Mentre i monomi

$$\frac{1}{2}\,a^3b^5c \;\; e \;\; 5\,a^5b^3c \tag{7.12}$$

non sono simili in quanto non hanno identica *parola*, in quanto devono essere uguali anche gli esponenti delle lettere corrispondenti.

7.6. **Somma e differenza tra monomi.** Si possono sommare o sottrarre soltanto monomi tra loro simili ad esempio se abbiamo la seguente somma algebrica da svolgere

$$\frac{1}{3}\,a^2b^3c + 3\,a^3b^2 - 5\,a^2b^3c + \frac{1}{4}\,a^3b^2 - 5\,ab^3 \tag{7.13}$$

potendo sommare o sottrarre soltanto monomi simili utilizziamo la seguente tecnica per sommarli

$$a^2b^3c\,(\frac{1}{3} - 5) + a^3b^2(3 + \frac{1}{4}) - 5\,ab^3 \tag{7.14}$$

Troviamo il *m.c.m.*

$$(\frac{1-15}{3})\,a^2b^3c + (\frac{12+3}{4})\,a^3b^2 - 5\,ab^3 \tag{7.15}$$

da cui

$$-\frac{14}{3}\,a^2b^3c + \frac{15}{4}\,a^3b^2 - 5\,ab^3 \tag{7.16}$$

8. I POLINOMI

Definiamo polinomio la somma algebrica di due o piú monomi, ad esempio é polinomio l'espressione (7.16)

8.1. **Grado di un polinomio.** Si definisce grado di un polinomio il massimo grado dei monomi che lo compongono.

8.2. **Prodotto tra due Polinomi.** Il prodotto tra polinomi é una operazione molto importante e a prima vista puó destare un pó di sgomento.Introduciamo tale tecnica simultaneamente ad alcuni esempi.
Supponiamo di moltiplicare i seguenti due polinomi

$$\underbrace{(a+b)}_{1^{mo}\,polin.} \cdot \underbrace{(c+d+e)}_{2^{mo}\,polin.} \tag{8.1}$$

La quantiá a del primo polinomio la si deve moltiplicare per tutte le quantitá del secondo polinomio e cosí via per tutte le quantitá del primo polinomio.
Quanto detto significa:

$$ac + ad + ae + bc + bd + be \tag{8.2}$$

é bene tenere presente che se il primo polinomio é costituito da 2 monomi e il secondo da 3, gli addendi del prodotto saranno $2 \cdot 3 = 6$, analogamente se sono m quelli del primo e n quelli del secondo gli addendi saranno $m \cdot n$, questo in un primo momento, successivamente , potrebbero esserci monomi simili quindi sommabili.

8.2.1. ***Esempio: Prodotto tra polinomi***. Calcoliamo il seguente prodotto

$$(\frac{1}{2}\,a^2b^3 - 2\,ab + 5\,ab^2) \cdot (3\,a^2 + 2\,ab^2 - \frac{2}{3}\,ab) = \tag{8.3}$$

indichiamo tutte le operazioni

$$\begin{aligned}
&= [(\frac{1}{2}\,a^2b^3) \cdot (3\,a^2) + (\frac{1}{2}\,a^2b^3) \cdot (2\,ab^2) + (-\frac{1}{2}\,a^2b^3) \cdot (\frac{2}{3}\,ab)] + \\
&+ [(-2\,ab) \cdot (3\,a^2) + (-2\,ab) \cdot (2\,ab^2) + (-2\,ab) \cdot (-\frac{2}{3}\,ab)] + \\
&+ [(5\,ab^2) \cdot (3\,a^2) + (5\,ab^2) \cdot (2\,ab^2) + (5\,ab^2) \cdot (-\frac{2}{3}\,ab)] =
\end{aligned}$$

svolgendo i prodotti

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2}a^4b^3 + a^3b^5 - \frac{1}{3}a^3b^4 - \\
&- 6a^3b - \underbrace{4a^2b^3}_{*} + \frac{4}{3}a^2b^2 + \\
&+ 15a^3b^2 + 10a^2b^4 - \underbrace{\frac{10}{3}a^2b^3}_{*} =
\end{aligned}$$

dopo aver svolto i prodotti ce ne accorgiamo che vi é piú di un termine in a^2b^3 quindi li accorpiamo

$$= \frac{3}{2}a^4b^3 + a^3b^5 - \frac{1}{3}a^3b^4 - 6a^3b\frac{4}{3}a^2b^2 + 15a^3b^2 + 10a^2b^4 + a^2b^3(-4 - \frac{10}{3}) =$$

cioé

$$= \frac{3}{2}a^4b^3 + a^3b^5 - \frac{1}{3}a^3b^4 - 6a^3b + \frac{4}{3}a^2b^2 + 15a^3b^2 + 10a^2b^4 - \frac{22}{3}a^2b^3 \tag{8.4}$$

8.3. **Il quadrato del binomio $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$.** Se studiamo lo sviluppo di

$$(a+b)^2 \tag{8.5}$$

per le regole del prodotto tra polinomi

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab \tag{8.6}$$

implica

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \tag{8.7}$$

con procedura analoga si ha

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \tag{8.8}$$

quindi in definitiva possiamo scrivere

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab \tag{8.9}$$

da ció :

Il quadrato del binomio é uguale al quadrato del primo termine piú il quadrato del secondo termine piú o meno il doppio prodotto del primo per il secondo, + *se tra i due monomi c'é* +*, mentre - se c'é il - .*

8.4. **Cubo del Binomio.**

- $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$
- $(a-b)^3 = a^3 - b^3 + 3a^2(-b) + 3ab^2$

Analizziamo la quantitá

$$(a+b)^3 \tag{8.10}$$

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a^2 + b^2 + 2ab) = \tag{8.11}$$

$$= a^3 + ab^2 + 2a^2b + a^2b + b^3 + 2ab^2 =$$

raggruppando per termini simili

$$= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \tag{8.12}$$

In definitiva

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \tag{8.13}$$

Analizziamo la quantitá

$$(a-b)^3 \tag{8.14}$$

$$(a-b)^3 = (a-b)\cdot(a-b)^2 = \tag{8.15}$$

$$= (a-b)\cdot(a^2 + b^2 - 2\,ab) =$$

$$= a^3 + ab^2 - 2a^2b - a^2b - b^3 + 2ab^2 =$$

$$= a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2 =$$

In definitiva

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - b^3 + 3a^2(-b) + 3ab^2} \tag{8.16}$$

8.5. **Analisi di** $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$**.**

Analizziamo il prodotto

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2 \tag{8.17}$$

quindi

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)} \tag{8.18}$$

Mentre la quantitá

$$a^2 + b^2$$

non la si puó sviluppare

9. Quadrato di un Trinomio

Consideriamo il seguente quadrato di trinomio

$$(a + b + c)^2 \tag{9.1}$$

Per la definizione di quadrato di un polinomio si ha

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c) \cdot (a + b + c) =$$

$$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + cb + c^2 =$$

riordinando e raccogliendo a fattor comune:

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

In definitiva

$$\boxed{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc} \tag{9.2}$$

Lo sviluppo del quadrato di un trinomio é uguale al quadrato del primo termine piú il quadrato del secondo termine piú il quadrato del terzo temine, piú il doppio prodotto del primo per il secondo, piú il doppio prodotto del primo per il terzo, piú il doppio prodotto del secondo per il terzo.