Esercizi**3.1-1**

Se $f(n)$ e $g(n)$ sono funzioni asintoticamente non negative, usate la definizione di base della notazione Θ per dimostrare che $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$.

3.1-2

Dimostrate che per qualsiasi costante reale a e b , con $b > 0$,

$$(n + a)^b = \Theta(n^b) \quad (3.2)$$

3.1-3

Spiegate perché l'asserzione "il tempo di esecuzione dell'algoritmo A è almeno $O(n^2)$ " è priva di significato.

3.1-4

È vero che $2^{n+1} = O(2^n)$? È vero che $2^{2n} = O(2^n)$?

3.1-5

Dimostrate il Teorema 3.1.

3.1-6

Dimostrate che il tempo di esecuzione di un algoritmo è $\Theta(g(n))$ se e soltanto se il suo tempo di esecuzione nel caso peggiore è $O(g(n))$ e quello nel caso migliore è $\Omega(g(n))$.

3.1-7

Dimostrate che $o(g(n)) \cap \omega(g(n))$ è l'insieme vuoto.

3.1-8

Possiamo estendere la nostra notazione al caso di due parametri n e m che possono tendere indipendentemente all'infinito con tassi di crescita differenti. Per una data funzione $g(n, m)$, indichiamo con $O(g(n, m))$ l'insieme delle funzioni

$$O(g(n, m)) = \{f(n, m) : \text{esistono delle costanti positive } c, n_0 \text{ e } m_0 \\ \text{ tali che } 0 \leq f(n, m) \leq cg(n, m) \\ \text{ per ogni } n \geq n_0 \text{ o } m \geq m_0\}$$

Date le corrispondenti definizioni per $\Omega(g(n, m))$ e $\Theta(g(n, m))$.

3.2 Notazioni standard e funzioni comuni

Questo paragrafo presenta alcune funzioni e notazioni matematiche standard ed esamina le loro relazioni; descrive anche l'uso delle notazioni asintotiche.

Funzioni monotone

Una funzione $f(n)$ è **monotonicamente crescente** se $m \leq n$ implica $f(m) \leq f(n)$; analogamente, $f(n)$ è **monotonicamente decrescente** se $m \leq n$ implica $f(m) \geq f(n)$. Una funzione $f(n)$ è **strettamente crescente** se $m < n$ implica $f(m) < f(n)$ e **strettamente decrescente** se $m < n$ implica $f(m) > f(n)$.

Floor e ceiling

Dato un numero reale x , indichiamo con $\lfloor x \rfloor$ (si legge "floor di x ") l'intero più grande che è minore o uguale a x e con $\lceil x \rceil$ (si legge "ceiling di x ") l'intero più piccolo che è maggiore o uguale a x . Per qualsiasi numero reale x

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1 \quad (3.3)$$

Per qualsiasi numero intero n

$$\lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor = n$$

Per qualsiasi numero reale $n \geq 0$ e due interi $a, b > 0$

$$\lceil \lceil n/a \rceil / b \rceil = \lceil n/ab \rceil \quad (3.4)$$

$$\lfloor \lfloor n/a \rfloor / b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor \quad (3.5)$$

$$\lceil a/b \rceil \leq (a + (b - 1))/b \quad (3.6)$$

$$\lfloor a/b \rfloor \geq (a - (b - 1))/b \quad (3.7)$$

La funzione floor $f(x) = \lfloor x \rfloor$ e la funzione ceiling $f(x) = \lceil x \rceil$ sono monotonicamente crescenti.

Aritmetica modulare

Per qualsiasi intero a e qualsiasi intero positivo n , il valore $a \bmod n$ è il **resto** (o **residuo**) del quoziente a/n :

$$a \bmod n = a - \lfloor a/n \rfloor n \quad (3.8)$$

Una volta definito il resto della divisione fra due numeri interi, è comodo utilizzare una notazione speciale per indicare l'uguaglianza dei resti. Se $(a \bmod n) = (b \bmod n)$, scriviamo $a \equiv b \pmod{n}$ e diciamo che a è **equivalente** a b , modulo n . In altre parole, $a \equiv b \pmod{n}$ se a e b hanno lo stesso resto quando sono divisi per n . In modo equivalente, $a \equiv b \pmod{n}$ se e soltanto se n è un divisore di $b - a$. Scriviamo $a \not\equiv b \pmod{n}$ se a non è equivalente a b , modulo n .

Polinomi

Dato un intero non negativo d , un **polinomio in n di grado d** è una funzione $p(n)$ della forma

$$p(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i$$

dove le costanti $a_0, a_1, \dots, a_d$ sono i **coefficienti** del polinomio e $a_d \neq 0$. Un polinomio è asintoticamente positivo se e soltanto se $a_d > 0$. Per un polinomio asintoticamente positivo $p(n)$ di grado d , si ha $p(n) = \Theta(n^d)$. Per qualsiasi costante reale $a \geq 0$, la funzione n^a è monotonicamente crescente e per qualsiasi costante reale $a \leq 0$, la funzione n^a è monotonicamente decrescente. Si dice che una funzione $f(n)$ è **polinomialmente limitata** se $f(n) = O(n^k)$ per qualche costante k .

Esponenziali

Per qualsiasi reale $a > 0$, m e n , si hanno le seguenti identità:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^1 &= a \\ a^{-1} &= 1/a \\ (a^m)^n &= a^{mn} \\ (a^m)^n &= (a^n)^m \\ a^m a^n &= a^{m+n} \end{aligned}$$

Per qualsiasi n e $a \geq 1$, la funzione a^n è monotonicamente crescente in n . Per comodità, assumeremo $0^0 = 1$.

Le velocità di crescita delle funzioni polinomiali ed esponenziali possono essere correlate per il seguente fatto. Per tutte le costanti a e b , con $a > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \quad (3.9)$$

da cui possiamo concludere che

$$n^b = o(a^n)$$

Quindi, qualsiasi funzione esponenziale con una base strettamente maggiore di 1 cresce più rapidamente di qualsiasi funzione polinomiale.

Se usiamo e per indicare $2.71828\dots$, la base dei logaritmi naturali, otteniamo per qualsiasi valore reale x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad (3.10)$$

Il simbolo “!” indica la funzione fattoriale (definita successivamente). Per ogni reale x , abbiamo la disuguaglianza

$$e^x \geq 1 + x \quad (3.11)$$

Qui l'uguaglianza vale soltanto se $x = 0$. Quando $|x| \leq 1$, abbiamo l'approssimazione

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2 \quad (3.12)$$

Quando $x \rightarrow 0$, l'approssimazione di e^x con $1 + x$ è abbastanza buona:

$$e^x = 1 + x + \Theta(x^2)$$

(In questa equazione la notazione asintotica è usata per descrivere il comportamento al limite per $x \rightarrow 0$, anziché per $x \rightarrow \infty$.) Per ogni x si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (3.13)$$

Logaritmi

Adotteremo le seguenti notazioni:

$$\lg n = \log_2 n \quad (\text{logaritmo binario})$$

$$\ln n = \log_e n \quad (\text{logaritmo naturale})$$

$$\lg^k n = (\lg n)^k \quad (\text{elevamento a potenza})$$

$$\lg \lg n = \lg(\lg n) \quad (\text{composizione})$$

Un'importante convenzione che adotteremo con queste notazioni è che *le funzioni logaritmiche si applicano soltanto al termine successivo nella formula*, quindi $\lg n + k$ significa $(\lg n) + k$, non $\lg(n + k)$. Per $b > 1$ e $n > 0$, la funzione $\log_b n$ è strettamente crescente. Per qualsiasi reale $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ e n , si ha

$$a = b^{\log_b a}$$

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$$

$$\begin{aligned}\log_b a^n &= n \log_b a \\ \log_b a &= \frac{\log_c a}{\log_c b}\end{aligned}\quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}\log_b(1/a) &= -\log_b a \\ \log_b a &= \frac{1}{\log_a b} \\ a^{\log_b c} &= c^{\log_b a}\end{aligned}\quad (3.15)$$

In tutte queste equazioni le basi dei logaritmi sono diverse da 1.

Per l'equazione (3.14), cambiando la base di un logaritmo da una costante all'altra, cambia soltanto il valore del logaritmo per un fattore costante, quindi useremo spesso la notazione “ $\lg n$ ” quando i fattori costanti non sono importanti, come nella notazione O . Gli scienziati informatici ritengono che 2 sia la base più naturale dei logaritmi, perché molti algoritmi e strutture dati richiedono la suddivisione di un problema in due parti.

C'è un semplice sviluppo in serie di $\ln(1+x)$ quando $|x| < 1$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Abbiamo anche le seguenti disuguaglianze per $x > -1$:

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x \quad (3.16)$$

L'uguaglianza vale soltanto se $x = 0$.

Una funzione $f(n)$ è detta **polilogaritmicamente limitata** se $f(n) = O(\lg^k n)$ per qualche costante k . Per correlare la crescita dei polinomi con quella dei polilogaritmi, sostituiamo nell'equazione (3.9) n con $\lg n$ e a con 2^a ; otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg^b n}{(2^a)^{\lg n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg^b n}{n^a} = 0$$

Da questo limite, possiamo concludere che

$$\lg^b n = o(n^a)$$

per qualsiasi costante $a > 0$. Quindi, una funzione polinomiale positiva cresce più rapidamente di una funzione polilogaritmica.

Fattoriali

La notazione $n!$ (si legge “ n fattoriale”) è definita per i numeri interi $n \geq 0$:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

Quindi, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Un limite superiore meno stretto per la funzione fattoriale è $n! \leq n^n$, in quanto ciascuno degli n termini nel prodotto fattoriale è al massimo n . L'**approssimazione di Stirling**

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (3.17)$$

dove e è la base del logaritmo naturale, fornisce un limite superiore più stretto e anche un limite inferiore. È possibile dimostrare che (vedere Esercizio 3.2-3)

$$\begin{aligned} n! &= o(n^n) \\ n! &= \omega(2^n) \\ \lg(n!) &= \Theta(n \lg n) \end{aligned} \quad (3.18)$$

dove l'approssimazione di Stirling è utile per dimostrare l'equazione (3.18). La seguente equazione vale anche per qualsiasi $n \geq 1$:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n} \quad (3.19)$$

dove

$$\frac{1}{12n+1} < \alpha_n < \frac{1}{12n} \quad (3.20)$$

Iterazione di funzione

Usiamo la notazione $f^{(i)}(n)$ per denotare la funzione $f(n)$ applicata iterativamente i volte a un valore iniziale di n . Formalmente, sia $f(n)$ una funzione definita sui reali. Per interi non negativi i , definiamo in modo ricorsivo

$$f^{(i)}(n) = \begin{cases} n & \text{se } i = 0 \\ f(f^{(i-1)}(n)) & \text{se } i > 0 \end{cases}$$

Per esempio, se $f(n) = 2n$, allora $f^{(i)}(n) = 2^i n$.

La funzione logaritmica iterata

Utilizziamo la notazione $\lg^* n$ (si legge “log stella di n ”) per denotare l'algoritmo iterato, che è definito nel modo seguente. Sia $\lg^{(i)} n$ una funzione definita come nel precedente paragrafo, con $f(n) = \lg n$. Poiché l'algoritmo di un numero non positivo non è definito, la funzione $\lg^{(i)} n$ è definita soltanto se $\lg^{(i-1)} n > 0$. Non bisogna confondere $\lg^{(i)} n$ (la funzione logaritmica applicata i volte in successione, a partire dall'argomento n) con $\lg^i n$ (il logaritmo di n elevato alla i -esima potenza). La funzione logaritmica iterata è definita così

$$\lg^* n = \min \{i \geq 0 : \lg^{(i)} n \leq 1\}$$

Il logaritmo iterato è una funzione che cresce *molto* lentamente:

$$\begin{aligned} \lg^* 2 &= 1 \\ \lg^* 4 &= 2 \\ \lg^* 16 &= 3 \\ \lg^* 65536 &= 4 \\ \lg^*(2^{65536}) &= 5 \end{aligned}$$

Poiché si stima che il numero di atomi nell'universo visibile sia pari a circa 10^{80} , che è molto più piccolo di 2^{65536} , raramente potremo incontrare un input di dimensione n tale che $\lg^* n > 5$.

Numeri di Fibonacci

I *numeri di Fibonacci* sono definiti dalla seguente ricorrenza:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_i &= F_{i-1} + F_{i-2} \quad \text{for } i \geq 2 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Poiché ogni numero di Fibonacci è la somma dei due numeri precedenti, si ottiene la sequenza

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

I numeri di Fibonacci sono correlati al *rapporto aureo* ϕ e al suo coniugato $\hat{\phi}$, che sono dati dalle seguenti formule:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.61803\dots \\ \hat{\phi} &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -.61803\dots \end{aligned} \tag{3.22}$$

Più precisamente, si ha

$$F_i = \frac{\phi^i - \hat{\phi}^i}{\sqrt{5}} \tag{3.23}$$

Questa relazione può essere dimostrata per induzione (vedere Esercizio 3.2-6). Poiché $|\hat{\phi}| < 1$, si ha $|\hat{\phi}^i|/\sqrt{5} < 1/\sqrt{5} < 1/2$, quindi l' i -esimo numero di Fibonacci F_i è uguale a $\phi^i/\sqrt{5}$ arrotondato all'intero più vicino. Dunque, i numeri di Fibonacci crescono in modo esponenziale.

Esercizi**3.2-1**

Dimostrate che, se $f(n)$ e $g(n)$ sono funzioni monotonicamente crescenti, allora lo sono anche le funzioni $f(n) + g(n)$ e $f(g(n))$; se $f(n)$ e $g(n)$ sono anche non negative, allora $f(n) \cdot g(n)$ è monotonicamente crescente.

3.2-2

Dimostrate l'equazione (3.15).

3.2-3

Dimostrate l'equazione (3.18). Dimostrate inoltre che $n! = \omega(2^n)$ e $n! = o(n^n)$.

3.2-4 *

La funzione $\lceil \lg n \rceil!$ è polinomialmente limitata? La funzione $\lceil \lg \lg n \rceil!$ è polinomialmente limitata?

3.2-5 *

Quale funzione è asintoticamente più grande: $\lg(\lg^* n)$ o $\lg^*(\lg n)$?

3.2-6

Dimostrate per induzione che l' i -esimo numero di Fibonacci soddisfa la seguente relazione (ϕ è il rapporto aureo e $\hat{\phi}$ è il suo coniugato):

$$F_i = \frac{\phi^i - \hat{\phi}^i}{\sqrt{5}}$$

3.2-7

Dimostrate che per $i \geq 0$, l' $(i + 2)$ -esimo numero di Fibonacci soddisfa la relazione $F_{i+2} \geq \phi^i$.

3.3 Problemi**3-1 Comportamento asintotico di polinomi**

Dato il seguente polinomio in n di grado d (con $a_d > 0$ e k costante):

$$p(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i$$

Applicate le definizioni delle notazioni asintotiche per dimostrare le seguenti proprietà:

- Se $k \geq d$, allora $p(n) = O(n^k)$.
- Se $k \leq d$, allora $p(n) = \Omega(n^k)$.
- Se $k = d$, allora $p(n) = \Theta(n^k)$.
- Se $k > d$, allora $p(n) = o(n^k)$.
- Se $k < d$, allora $p(n) = \omega(n^k)$.

3-2 Crescite asintotiche relative

Indicate, per ogni coppia di espressioni (A, B) della seguente tabella, se A è O , o , Ω , ω , o Θ di B . Supponete che $k \geq 1$, $\epsilon > 0$ e $c > 1$ siano costanti. Inserite le risposte ("sì" o "no") in ogni casella della tabella.

	A	B	O	o	Ω	ω	Θ
a.	$\lg^k n$	n^ϵ					
b.	n^k	c^n					
c.	$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
d.	2^n	$2^{n/2}$					
e.	$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$					
f.	$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$					

3-3 Classificare le funzioni per velocità di crescita

a. Ordinate le seguenti funzioni per velocità di crescita; ovvero trovate una disposizione $g_1, g_2, \dots, g_{30}$ delle funzioni che soddisfano le relazioni $g_1 = \Omega(g_2)$, $g_2 = \Omega(g_3)$, $\dots$, $g_{29} = \Omega(g_{30})$. Suddividete il vostro elenco in classi di equivalenza in modo tale che $f(n)$ e $g(n)$ si trovino nella stessa classe se e soltanto se $f(n) = \Theta(g(n))$.

$$\begin{array}{cccccc}
 \lg(\lg^* n) & 2^{\lg^* n} & (\sqrt{2})^{\lg n} & n^2 & n! & (\lg n)! \\
 \left(\frac{3}{2}\right)^n & n^3 & \lg^2 n & \lg(n!) & 2^{2^n} & n^{1/\lg n} \\
 \ln \ln n & \lg^* n & n \cdot 2^n & n^{\lg \lg n} & \ln n & 1 \\
 2^{\lg n} & (\lg n)^{\lg n} & e^n & 4^{\lg n} & (n+1)! & \sqrt{\lg n} \\
 \lg^*(\lg n) & 2\sqrt{2^{\lg n}} & n & 2^n & n \lg n & 2^{2^{n+1}}
 \end{array}$$

- b.** Indicate una funzione $f(n)$ non negativa che, per ogni funzione $g_i(n)$ del punto (a), non sia $O(g_i(n))$ né $\Omega(g_i(n))$.

3-4 Proprietà della notazione asintotica

Siano $f(n)$ e $g(n)$ due funzioni asintoticamente positive. Dimostrate la veridicità o falsità delle seguenti congetture.

- a.** $f(n) = O(g(n))$ implica $g(n) = O(f(n))$.
b. $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$.
c. $f(n) = O(g(n))$ implica $\lg(f(n)) = O(\lg(g(n)))$, dove $\lg(g(n)) \geq 1$ e $f(n) \geq 1$ per ogni n sufficientemente grande.
d. $f(n) = O(g(n))$ implica $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.
e. $f(n) = O((f(n))^2)$.
f. $f(n) = O(g(n))$ implica $g(n) = \Omega(f(n))$.
g. $f(n) = \Theta(f(n/2))$.
h. $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$.

3-5 Varianti di O e Ω

Alcuni autori definiscono Ω in un modo un po' diverso dal nostro; usiamo $\tilde{\Omega}$ (si legge "Omega infinito") per questa definizione alternativa. Diciamo che $f(n) = \tilde{\Omega}(g(n))$ se esiste una costante positiva c tale che $f(n) \geq cg(n) \geq 0$ per un numero infinitamente grande di interi n .

- a.** Dimostrate che per ogni coppia di funzioni $f(n)$ e $g(n)$, asintoticamente non negative, valgono entrambe le relazioni $f(n) = O(g(n))$ e $f(n) = \tilde{\Omega}(g(n))$ o una sola di esse, mentre ciò non è vero se si usa Ω al posto di $\tilde{\Omega}$.
b. Descrivete i vantaggi e svantaggi potenziali di usare $\tilde{\Omega}$, anziché Ω , per caratterizzare i tempi di esecuzione dei programmi.

Alcuni autori definiscono O in modo un po' diverso; usiamo O' per la definizione alternativa. Diciamo che $f(n) = O'(g(n))$ se e soltanto se $|f(n)| = O(g(n))$.

- c.** Che cosa accade per ciascuna direzione della clausola "se e soltanto se" nel Teorema 3.1, se sostituiamo O con O' , mantenendo Ω ?

Alcuni autori definiscono $\tilde{O}$ (si legge "O tilde") per indicare O con fattori logaritmici ignorati:

$$\tilde{O}(g(n)) = \{f(n) : \text{esistono delle costanti positive } c, k \text{ e } n_0 \text{ tali che } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \lg^k(n) \text{ per ogni } n \geq n_0\}$$

- d.** Definite $\tilde{\Omega}$ e $\tilde{\Theta}$ in modo analogo. Dimostrate il corrispondente Teorema 3.1.

3-6 Funzioni iterate

L'operatore di iterazione $*$ usato nella funzione $\lg^*$ può essere applicato a qualsiasi funzione monotonamente crescente $f(n)$ nei numeri reali. Per una data costante $c \in \mathbf{R}$, definiamo la funzione iterata f_c^* in questo modo:

$$f_c^*(n) = \min \{i \geq 0 : f^{(i)}(n) \leq c\}$$

Questa funzione non ha bisogno di essere ben definita in tutti i casi. In altre parole, la quantità $f_c^*(n)$ è il numero di applicazioni ripetute della funzione f che sono necessarie per ridurre il suo argomento a un valore minore o uguale a c .

Per ciascuna delle seguenti funzioni $f(n)$ e costanti c , specificate il limite più stretto possibile per $f_c^*(n)$.

	$f(n)$	c	$f_c^*(n)$
a.	$n - 1$	0	
b.	$\lg n$	1	
c.	$n/2$	1	
d.	$n/2$	2	
e.	$\sqrt{n}$	2	
f.	$\sqrt{n}$	1	
g.	$n^{1/3}$	2	
h.	$n/\lg n$	2	

Note

Secondo Knuth [182] l'origine della notazione O risale a un testo sulla teoria dei numeri scritto da P. Bachmann nel 1892. La notazione o è stata inventata da E. Landau nel 1909 con le sue argomentazioni sulla distribuzione dei numeri primi. Knuth [186] sostenne l'applicazione delle notazioni Ω e Θ per correggere la pratica diffusa, ma tecnicamente poco precisa, di usare la notazione O per entrambi i limiti superiore e inferiore. Molti continuano a usare la notazione O nei casi in cui la notazione Θ sarebbe tecnicamente più precisa. Per ulteriori informazioni sulla storia e lo sviluppo delle notazioni asintotiche, consultate Knuth [182, 186] e Brassard e Bratley [46].

Non tutti gli autori definiscono le notazioni asintotiche nello stesso modo, sebbene le varie definizioni concordino nella maggior parte delle situazioni più comuni. Alcune definizioni alternative includono funzioni che non sono asintoticamente non negative, finché i loro valori assoluti sono appropriatamente limitati.

L'equazione (3.19) è dovuta a Robbins [260]. Per altre proprietà delle funzioni matematiche di base, consultate un buon testo di matematica, come Abramowitz e Stegun [1] o Zwillinger [320], o un libro di calcolo, come Apostol [18] o Thomas e Finney [296]. I testi di Knuth [182] e di Graham, Knuth e Patashnik [132] contengono materiale abbondante sulla matematica discreta applicata all'informatica.